様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３３４０００９

研究課題名（和文）安定性と数論

研究課題名（英文）Stability and Arithmetic Gormetry

研究代表者
翁　林（WENG, Lin）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・教授

研究者番号：６０３０４００２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　 11,600,000円

研究成果の概要（和文）：1．非可換ゼータ函数の零点分布の2つのレベルの構造があることを発見した．ゼータの零点の研究の基礎となる．2．Drinfeldの仕事を動機に,有限体上曲線の純非可換ゼータ函数を導入した．この分野の転換点である．3．Zagierと， 全て楕円曲線の高階ゼータ函数のリーマン予想を証明している．分野の突破口．4．モチーフなEuler積の普遍的な構造を発見している． 曲線上の主束の幾何的と数論的側面の統一性を得ている．5．菅原と算術的多様体のアデリックコホモロジー理論を進展させている． 基礎となる．6．Zagierと，ある種ゼータ函数を決定し，特殊統一性を確立した．

研究成果の概要（英文）：Mainly concentrated on non-abelian zeta functions. Historic achievements are (1) introduce pure non-abelian zeta functions for function fields motivated by Driffield's work on counting super-cuspidal Galois representations, (2) prove jointly with Zagier the Riemann hypothesis for pure zetas of elliptic curves, (3) discover two levels of structures for distributions of zeta zeros. We explain (3) in details only. Unlike for distributions of Riemann zeros, the classical delta distributions are of Dirac type. In concrete terms, this means that the delta sequences of pair correlations have accumulating points. This is very different from that of Gaussian unitary ensembles (GUE). However, motivated by the work (2), we blow-up the infinitesimal neighborhood of these accumulating points to introduce totally new big Delta sequences and hence to discover the second level structure of the distributions of our zeta zeros. We conjecture that the structure of big Delta distributions are that of GUE.

研究分野：数論幾何

キーワード：ゼータ函数　零点の分布　Dirac 分布　対相関関数　モチーフなEuler積　ゼータの特殊統一性　リーマン予想　アデリックコホモロジー理論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代表者が導入した大域体の非可換高階ゼータ関数を調べる．非可換高階ゼータ関数は, 代数体に対しては半安定格子のモジュライ空間を用いて定義され, 有限体上の関数体に対しては, 代数曲線上の半安定ベクトル束のモジュライ空間を用いて定義される．これに関する主要な問題は次の通りである.

(a) 高階ゼータ関数の詳細な構造を知ること．これまでに知られている高階ゼータ関数は極めて少ない. 実際, 階数 2 の場合を除いて, 高階ゼータ関数の閉じた表示は一つも知られていない．これは Eistenstein 級数の Fourier 展開の複雑さと, 基本領域の複雑さの双方に起因する．例えば，階数 3 の場合でさえ，極大放物部分群 $P(2,1), P(1,2)$, あるいは Borel 部分群 $B = P(1,1,1)$ に付随する Fourier 展開の形の複雑さのために，階数 3 のゼータ関数に表れるような, $P(1,2), P(2,1)$, または B に対応するカスプ領域を除いた基本領域上での Eisenstein 級数の積分の計算は, 未だ満足すべきものにはなっていない．この問題への解決を相対跡公式と拡張された Rankin-Selberg 法の観点から試みる．

(b) 格子に放物性の概念を導入した上で, 半安定な放物的格子に付随する新しい非可換ゼータ関数を導入し，Artin ゼータ関数との関係を明らかにすること．このために, まず放物的 $\mathcal{O}_K$-格子と軌道格子 (orbifold lattices) $\Lambda/\mathcal{O}_L$ の間の自然な対応について考察する．ここでは格子 $\Lambda/\mathcal{O}_L$ にガロア群 $G_{L/K}$ の作用を込めて考えている. (幾何学においては, 軌道ベクトル束 (orbifold bundles) の概念が Grothendieck によって導入され, 軌道ベクトル束と放物的ベクトル束の対応が Seshadri により確立されている.) そして, 我々の高階ゼータ関数の構成法を半安定放物格子, もしくは半安定放物的ベクトル束のモジュライ空間に対して適用することを試みる.

(c) 関数体に対する高階ゼータ関数のコホモロジー論的解釈を与えること．これには，Brill-Noether 軌跡，および，重み付き Lefschetz 不動点定理を用いるのが有効であろう．

(d) 代表者が簡約群 G と, その極大放物部分群 P について導入した, 群ゼータ関数の零点について, より精密な構造を理解すること. したがって，今後の課題として以下のような研究が挙げられる.

(α) (G, P) のゼータ関数たちの一般的なリーマン予想．（もちろん, 全ての (G, P) のゼータ関数に対して Riemann 予想を確立できれば理想的であるが, これは未だ我々の能力が及ばない範囲の問題に思われる.)

(β) 族 $(SL(n), P(n-1,1))$ に対応するゼータ関数に対して, 零点のパターンを比較, 観察すること. 無限 (研究代表者と鈴木による数値計算例によれば, これらの零点を $\frac{1}{2}+i\sigma_{n,m}, n = 2,3,4,\ldots$ と書いて, n を動かしたとき, 零点の間隔分布は一定のパターンを保持することが観察されている.)

このような事柄は, 対称性が Riemann 予想に関して果たす新しい役割を明らかにすると思われる．こういった現象を数値実験により検証するため, A, B, C, D, E, F, G 型の Lie 群のような, 古典群に付随するゼータ関数の明示的な表示を計算するコンピュータ・プログラムを作成する．そして, このゼータ関数の明示的な表示を, 高次相関関係を初めとする, 零点の分布パターンの解析に用いる．より具体的には, 我々のゼータ関数の零点分布とランダム行列の固有値分布を比較することを行う．特に, GUE, GOE, GSE と呼ばれる分布との比較が興味深い. 実際, ランダム行列理論は古典的なゼータ関数の零点の研究に盛んに応用されている.

(e) 高階ゼータ関数, および, 群ゼータ関数のよい応用を見つけること．これは上記の問題と等しく重要である．このために, 我々はゼータ関数の加法的構造とは何であるかを明らかにせねばならない. これは Hecke L 関数の言葉で述べれば, L 関数が Dirichlet 級数表示を持つという事実と, L 関数の解析接続と関数等式が, L 関数の $\frac{1}{s(s-1)}\rho$ と $\int_1^\infty F(y)(|y|^s+|y|^{1-s})d^*y$ から成る単純な表示から導かれるという事実に反映されている．これらの事実は高階ゼータ関数に関しても同様に成り立つ．このことから, 例えば,Riemann ゼータ関数の臨界線上の零点に関する Hardy の定理, 代数体の類数 h とレギュレーター R の積 hR の漸近挙動に関する Brauer-Siegel の定理, および イデアルの個数関数の漸近挙動 $j_F(T) := \#\{a \subset \mathcal{O}_F : N(a) \leq T\} \simeq \rho_F \cdot T + O(T^{b+\varepsilon})$, などの代数体の構造に関する基本的な事実が, 高階ゼータ関数を経由して, 非アーベル的な状況下へと一般化される.

２．研究の目的

この研究の目的は, 安定性の概念を, 局所体と大域双方に関する数論的性質, および数論的構造の, 非アーベル的側面を研究するのに用いることである. 局所体に関しては, 淡中圏による定式化を用いて, p 進体の非可換類体論を確立することを目標に, de Rham 表現を slope ゼロの半安定な放物型ベクトル束の (数論) 類似を通して研究する. また, 大域体に関しては, Fontaine の局所周期環から作られた大域周期環や (非可換) 高階ゼータ関数を用いて, アデール的ガロア表現を研究する．これと並行して, 代表者が導入した大域体の非可換高階ゼータ関数，および，高階ゼータ関数の一般化である (G, P) に付随する群ゼータ関数の代数, 幾何, と解析的な側面を調べる.（高階ゼータ関数は, 代数体に対しては半安定格子のモジュライ空間を用いて定義され, 有限体上の関数体に対しては, 代数曲線上の半安定ベクトル束のモジュライ空間を用いて定義される．(G, P) に付随する群ゼータ関数はリー理論から可換ゼータ関数を用いて定義されて, Eisenstein 級数と関連する.） 特に, 高階ゼータ関数と高階ゼータ関数の一般化である (G, P) に付随する群ゼータ関数のの応用, および, その零点の分布を研究する.

３．研究の方法

3.1) 満足な表示が得られるような, 高階のゼータ関数の具体例を見つけること．(階数 3 の場合でさえ, 相対跡公式における既存の方法では不足である.)

3.2) (G, P) の群ゼータ関数を具体的に計算するコンピューター・プログラムを構築すること．ここで G は簡約群, P はその極大放物部分群である．とくに, G が古典的な半単純 Lie 群の場合にこれを行う.

3.3) A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の各型の群ゼータ関数に関する零点のパターンを解明すること．とくに, 零点の対相関 (pair correlation) を GUE, GOE, GSE などの分布と比較する.

3.4) (G, P) のゼータ関数の研究: 簡約群に対応する群ゼータ関数の零点分布のパターンを研究することに加え, 同様の構造がアフィン Lie 群の場合にも存在するのか否かを探る．簡約群の場合と異なり, アフィン Lie 群の場合では, ゼータ関数の定義に対する収束の問題が深刻になってくる．超関数 (distribution) の理論を用いる必要があるだろう.

3.5) ベクトル束, 主偏極 Abel 多様体, および Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間のゼータ関数の研究: Atiyah-Bott の論文は，p 進体上の理論と複素数体上の理論の類似をあたえる好例である．われわれの場合, 有限体上の代数曲線上の半安定ベクトル束のモジュライ空間のゼータ関数について, そこに現れる剰余体の元の個数 q を不定元と見なすことにより，2 変数のゼータ関数が得られる．ここで q を自然対数の底 e に特殊化することにより，無限素点でのモジュライ空間の点の個数の計算を, 有限体上の場合と同列に扱うことができる．このような Atiyah-Bott の思想を基にした, p 進体上の理論と複素数体上の理論の類似を, さらに追究したい.

４．研究成果

4.1) 我々は非可換ゼータ函数の零点に関する弱 Riemann 予想を証明した．さらにそれらの零点の分布に対して 2 つのレベルの構造があることを発見した．1 つは古典的な δ 函数に対する零点の分布の構造であり, もう 1 つは (big)Δ 函数の新しいタイプの零点の分布の構造である．特に, 我々は δ 函数が Dirac 分布を与えており, Δ 函数が Gaussian Unitary Ensembles やそれにより Riemann の零点の δ 函数の分布と関連があると予想している．これは Riemann ゼータの零点を含むゼータの零点の研究の進展への基礎となる.

[W1] L. Weng, *Distributions of Zeros for Non-Abelian Zeta Functions, 2015* http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/zetazeros.pdf を参照.

4.2) Drinfeld の仕事を動機に, 半安定なベクトル束の moduli 空間に対して, 次数と階数の特別な制限を使って, 有限体上の函数体に対する純非可換ゼータ函数を導入した．これはこの分野の転換点である: 我々の Amer J Math の論文の中で導入された古い非可換ゼータ函数は Riemann 予想を満たしていないが, 純ゼータ函数は RH を満たすことが期待されている.

[W2] L. WENG, *Counting Bundles,* arXiv:1202.0869

[W3] L. Weng, *Zeta functions for Curves over finite fields, arXiv:1202.3183*

4.3) Zagier との共同研究で, 我々はベータ不変量に関する乗法的な構造の新たな発見に基づき, 楕円曲線に付随する全ての純高階ゼータ函数に対する Riemann 予想を証明している．これがこの分野の突破口となっている.

[W4] L. WENG, *Zeta Functions for Elliptic Curves I. Counting Bundles,* arXiv:1202.0870

[WZ] L. Weng and D. Zagier, *Higher Rank Zeta Functions and Riemann Hypothesis for Elliptic Curves, 2013*
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/ECRH.pdf を参照.

4.4) 我々はモチーフな Euler 積に関する普遍的な構造を発見し, モチーフな玉川数予想を呈している. これは任意の基礎体上の曲線上にある G-torsors を数えることを可能にしている. 結果的に, 我々は安定な G-torsors のモジュライ空間の Poincare 多項式に関する Atiyah-Bott の幾何的なアプローチと Hader-Narasimhan の数論的なアプローチに対する統一化定理の一般的な枠組みを得ている. Lurie の最近の研究の観点で, より一般的なものである.

[W5] L. WENG, *Parabolic Reduction, Stability and the Mass I: Special Linear Groups, in RIMS Kokyuroku 1826, 2013.03*

[W6] L. Weng, *Motivic Euler Product and Its Applications*
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/motiviceuler.pdf を参照.

4.5) 菅原と一緒に, 我々は算術的多様体上の準連接層に対する一般のアデリックコホモロジー理論を進展させている. 特に, 算術的曲面に対して, 我々は2次元の adelic 環に対する自然な非退化ペアリングを導入することによって, Tate の学位論文の代数的な部分を算術的曲面に一般化している. これはこの分野にとって基礎的である.

[SW] K. Sugahara and L. WENG, *Arithmetic Cohomology Groups, 2013*
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/AriCohRes.pdf を参照.

4.6) 菅原と共に Deninger の助けを借りて, 我々は連接捩れ層に対するゼータ函数を導入し, 楕円曲線上の半安定束と連接捩れ層をつなげるゼータ函数の strange duality を確立した. 応用として, 我々は楕円曲線に対する相対 Shafarevich-Tate 群に対する Cohen-Lenstra heuristic の類似物を与えた. これは近年のフィールズ賞受賞者である Bahgava の研究の観点で, 重要な発見である.

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/ChinaJapan7.pdf を参照.

4.7) Zagier と, 我々は曲線に対する SL_n ゼータ函数を決定し, それにより Mozgovoy-Reineke 壁 crossing と Hall 代数の研究と合わせて, 非可換ゼータと SL_n に付随する群のゼータに対する特殊統一性を確立した. これは非可換不変量が可換不変量の群の非可換構造を通して得られるという事実を明らかにしている.

[W7] L. WENG, *Special Uniformity of Zeta Functions I. Geometric Aspect,* arXiv:1203.2305

[WZ2] L. WENG, D. Zagier, *Special Uniformity of Zeta Functions: SL_n-Zeta Functions for Curves over Finite Fields,* 2015
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/WZ12.pdf を参照.

4.8) 次に挙げるような研究を触発した: counting miracle 予想や階数 2 のゼータ函数の導函数の零点, そして自己同型形式の理論への確率的アプローチに関する菅原の研究; 小森 による (G,P) のゼータに予想されていた函数等式の証明; Ki-小森-鈴木による, (G,P) のゼータ函数の弱 Riemann 予想に関する最近の結果; wall-crossing や Hall 代数のテクニックを使った, 有限体上の曲線に対する高階ゼータ函数に関する Mozgovoy-Reineke の研究等.

[Ki] H. Ki, *On the zeros of Weng's zeta functions,* Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 13, 2367- 2393

[K] Y. Komori, *Functional equations of Weng's zeta functions for* $(G,P)/\mathbb{Q}$. Amer. J. Math. 135 (2013), no. 4, 1019-1038.

[KKS] H.Ki, Y. Komori, M. Suzuki, *On the zeros of weng zeta functions for Chevalier groups,* to appear in Math Manuscript

[MR] S. Mozgovoy and M. Reineke, *Moduli spaces of stable pairs and non-abelian zeta functions of curves via wall-crossing,* Journal de l'École polytechnique - Mathématiques, 1 (2014), 117 - 146, arXiv:1310.4991

[S] M. Suzuki, *Nearest neighbor spacing distributions for zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines,* to appear in Acta Arithmetica

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

（雑誌論文〕（計　1　件）
[BSW] I. Biswas, G. Schumacher, L.WENG, Deligne pairing and determinant bundle, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 18 (2011), 91-96

〔学会発表〕（計　15　件）
(1) L.WENG, Eisenstein periods I.II, at Bundles over Surfaces and Eisenstein Periods for Loop Groups, 2014.7.1, 九州大学

(2) L.WENG, Motivic Euler Product and Its Applications, at Arithmetic and Algebraic Geometry, 2014.01.30,　東京大学

(3) L.WENG, Cohen-Lenstra Heuristics for Relative Shafarevich-Tate Groups, at 7th China-Japan Seminar on Number Theory, 2013.10.28, 九州大学

(4) L.WENG, Global adelic cohomology groups for arithmetic varieties, at Pan Asia Number Theory 2013, 2013.07.23, Vietnam IAS for Mathematics, Hanoi

(5) L.WENG, General Uniformity of Zeta Functions, at Global invariants and moduli spaces, 2013.05.28-30, Korea IAS, Seoul

(6) L.WENG, Higher rank zeta functions and Riemann Hypothesis for elliptic curves, at Arithmetic and Algebraic Geometry 2013, 2013.01.30, 東京大学

(7) L.WENG, Non-abelian Zeta Functions for Elliptic Curves and Their Zeros, at Conference on L Functions, 2012.08.21-24, Jeju

(8) L.WENG, Non-Abelian Zeta Functions, at HIDA 60: p-adic Modular Forms and Arithmetic, 2012.06.23, UCLA, Los Angeles

(9) L.WENG, Parabolic reduction, stability and volumes of fundamental domains, at Automorphic forms and automorphic functions, 2012.01.02-03, RIMS, 京都大学

(10) L.WENG, A local family index theorem in log geometry, at Tokyo-Seoul conference in mathematics: Complex Geometry, 2011.12.03, 東京大学

(11) L.WENG, Relative Bott-Chern secondary characteristic classes and arithmetic Riemann-Roch theorem, at Number theory and related fields, 2011.06.01-06, University of Science and Technology of China, Hefei

(12) L.WENG, A Construction of Non-Abelian L-Functions, at Workshop on L-Functions, 2011.04.23, 九州大学

短期講義
(13) L.WENG, Zeta Functions and Their Zeros, 北海道大学, 2014.07.22-23

(14) L.WENG, Zeta Functions and Their Zeros, Mathematics Science Center, 清華大学, 2013.11-12, Beijing

(15) L.WENG, A construction of zeta functions, Department of Mathematics, Kyoto University, 2011.11.28-12.02, 京都大学
〔図書〕（計　　件）
〔産業財産権〕○出願状況（計　　件）

〔その他〕

A. 会議主催
A.1) Bundles over Surfaces and Eisenstein Periods for Loop Groups,
2014.06.30 - 07.01. 九州大学

A.2) Symposium on Automorphic Functions and Arithmetic Geometry:
One for Prof. L. Lafforgue's visit, 2013.04.26-28, 九州大学

A.3) Symposium on Arithmetic Geometry, 2012.10.19-21, 九州大学

A.4) Symposium on Arithmetic and Geometry, 2012.06.01-02, 九州大学

A.5) Workshop on L-Functions, 2011.04.21-23, 九州大学

B. 九州合同セミナー主催
市川尚志（佐賀大学）加藤文元（熊本大学）小櫃邦夫（鹿児島大学）と

B.1) Laurent Lafforgue (IHES), Introduction to the Langlands programme, 2013.05.01, Kyushu University (video available at http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/video.html)

B.2) Scott A. Wolpert (University of Maryland), $PSL(n;\mathbf{R})$ Surface Group Representations and Projective Twist-Bulge Deformations, 2013.11.09, Kagoshima University

B.3) Takeshi Saito (University of Tokyo), Wild ramification and the characteristic cycle of an l-adic sheaf, 2014.01.11, Saga University

B.4) Shinichi Mochizuki (Kyoto University), Invitation to Inter-universal Teichmüller Theory, 2014.05.24, Kumamoto University

B.5) Haruzo Hida (UCLA), Non CM components of the 'big' Hecke algebra,
Gopal Prasad (University of Michigan), Weakly commensurable Zariski-dense subgroups of semi-simple groups and isospectral locally symmetric spaces, 2014.07.26,
Kumamoto University

C. 短期訪問（約 1 が月）
C.1) IHES, France (Sept. 2011),

C.2) Max-Planck Institute for Mathematics, Germany (Sept. 2012, 2013),

C.3) UCLA, USA (March-April, 2012, 2013),

C.4) Tsinghua University, China (Nov-Dec., 2013)

D. ホームページ
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/∼weng/

６．研究組織

(1) 研究代表者
翁林（Lin WENG）

研究者番号：60304002