

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 28 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340014

研究課題名(和文) 反復積分と配置空間の幾何構造および量子位相不変量への応用

研究課題名(英文) Iterated integrals, geometric structures of configuration spaces and applications to quantum topological invariants

研究代表者

河野 俊丈 (Kohno, Toshitake)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：80144111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：KZ方程式のモノドロミー表現として記述される組みひも群の量子表現と、ホモロジー表現との関係を明らかにした。リーマン球面上の共形場理論における共形ブロックの空間の多変数超幾何関数の積分表示を、積分サイクルの構造も込めて明らかにし、KZ接続がGauss-Manin接続とみなせることを証明した。また、対数微分形式の反復積分を用いたChenのホモロジー接続の概念を発展させて、配置空間のホモトピー・パス垂群の高次の圏としての表現により、組みひも群の量子表現の高次の圏への拡張を構成した。

研究成果の概要(英文)：We clarified the relation between quantum representations of braid groups appearing as the monodromy representations of KZ equations and homological representations of braid groups. We gave an expression for the basis of the space of conformal blocks in conformal field theory on Riemann sphere by means of multi-variable hypergeometric functions by specifying integration cycles. We showed that the KZ connection in conformal field theory can be regarded as a Gauss-Manin connection. By developing the notion of Chen's formal homology connection and iterated integrals of logarithmic forms, we constructed higher category extensions of quantum representations of braid groups as representations of homotopy path groupoids of configuration spaces as higher categories.

研究分野：位相幾何学

キーワード：組みひも群 反復積分 量子群 配置空間 超幾何関数 KZ方程式 共形場理論 高次圏

1. 研究開始当初の背景

組みひも群の表現の理論については、量子群との関係、KZ 方程式のモノドロミー表現との関係などが明らかにされてきた。また、これは、配置空間上の対数的微分形式の反復積分と密接に関係していて、Kontsevich 積分との関連で、有限型量子位相不変量への応用が研究されてきた。一方、Bigelow, Krammer によってホモロジー表現とよばれる組みひも群の表現が忠実であることが証明され、このような表現と、量子群あるいは KZ 方程式との関連が重要な問題となっていた。また、共形場理論における共形ブロックの空間の具体的な積分表示は、多変数の超幾何関数、配置空間上の局所係数のホモロジー群についての問題を提供していて、これを解決することは、大きな課題となっていた。

2. 研究の目的

反復積分の理論は K. T. Chen によって、1980 年代にループ空間のド・ラム理論、微分形式による基本群の構造の記述などを目的として創始されたものである。その後、配置空間上の対数微分形式の反復積分による組みひも群の表現に関する研究代表者の研究などを経て、反復積分は、結び目に対する Kontsevich 積分などとして深化していく。本研究では、反復積分の理論を量子位相不変量の構成に応用すること、共形場理論におけるモノドロミー表現の構造の解明しこれを Gauss-Manin 接続として記述すること、周期積分を用いた配置空間の幾何構造を明らかにすること、配置空間のループ空間のホモロジーの代数構造を記述することにより有限型位相不変量のホモトピー論的な意味を確立することなどを目的とする。

3. 研究の方法

本研究は反復積分の理論を中心にすえつつ、リーマン面のモジュライ空間と写像類群、配置空間などの幾何学的対象を広範に研究し、さらに、ループ空間の研究に用いられる代数的位相幾何の手法、周期積分、位相的場の理論の手法などを横断的に用いて研究を展開した。しこのような幅広い分野の研究者の緊密な連携がはかった。そのために、分野間の交流をはかるセミナー、ワークショップを定期的に開催した。特に、2007 年 10 月に東京大学柏キャンパスに発足したカブリ数物連携宇宙研究機構(Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe, 略称 IPMU)の活動との連携は、幾何学と数理

物理の融合的な研究のため、本研究では重要な役割を果たす。研究代表者 河野俊丈および、連携研究員 斎藤恭司は、IPMU の主任研究員を併任しており、本研究は、IPMU との共同セミナーの開催によって、幅広い分野の数学の研究者と、理論物理学を招へいして、研究者との間の研究交流を促進した。

4. 研究成果

Riemann 球面上の、Wess-Zumino-Witten 模型から構成される共形場理論においては、共形ブロック束は Riemann 球面上の点の配置空間上のベクトル束となり、KZ 方程式とよばれる平坦接続が入る。この接続のモノドロミーとして、組みひも群の線形表現が得られる。一方、組みひも群のホモロジー表現は、点付き円板の写像類群のその配置空間のアーベル被覆のホモロジー群への作用として定義され、Krammer, Bigelow らによって研究された。本研究では、KZ 方程式の解の超幾何関数による積分表示を用いて、組みひも群のホモロジー表現と KZ 方程式のモノドロミー表現との関連を明らかにした。具体的には、パラメータが一般の場合に、Verma 加群のテンソル積の零ベクトル空間への組みひも群の作用がホモロジー表現と同値であることを証明した。さらに、配置空間の局所係数のホモロジー群への量子群の作用を調べ、組みひも群のホモロジー表現の量子対称性を記述した。共形場理論に現れるのは、パラメータが特殊な、無限遠においてレゾナントである場合であり、共形ブロックへの組みひも群の表現と量子群の 1 のべき根における表現の対称性をもつ。この場合に、積分サイクルの構造を詳しく調べて、KZ 方程式が、代数多様体の周期積分の満たす微分方程式として表されること、つまり、Gauss-Manin 接続としての表示されることを示した。

共形場理論において、Riemann 面のモジュライ空間上のベクトル束の射影平坦接続のモノドロミー表現として、写像類群の共形ブロックへの作用が定まる。L. Funar との共同研究において、このような表現による写像類群の像の構造を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 24 件)

① T. Kohno, A. Pajitnov, Circle-valued Morse theory for complex hyperplane arrangements, Forum Math. 27 (2015), no. 4, 2113-2128.

② H. Kaji, T. Terasoma, Degree formula for Grassmann bundles. J. Pure Appl. Algebra 219 (2015), no. 12, 5426-5428.

③ T. Kohno, Local systems on configuration spaces, KZ connections and conformal blocks, Acta Mathematica Vietnamica, Volume 39, Issue

4 (2014), 575--598.

④ T. Kohno, Quantum representations of braid groups and holonomy Lie algebras, to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics*.

⑤ L. Funar, T. Kohno, On Burau representations at roots of unity, *Geometriae Dedicata*: Volume 169, Issue 1 (2014), 145-163.

⑥ T. Kohno, A. Pajitnov, Novikov homology, jump loci and Massey products, *Cent. Eur. J. Math.* 12(9), (2014), 1285-1304.

⑦ T. Kohno, A. Pajitnov, Circle-valued Morse theory for complex hyperplane arrangements, *Forum Mathematicum* (2013), Published on line DOI 10.1515/forum-2013-0032.

⑧ J. Murakami, Invariants of handlebody -knots via Yokota's invariants. *J. Knot Theory Ramifications* 22 (2013), no. 11, 21 pp.

⑨ J. Cho and J. Murakami, Optimistic limits of the colored Jones polynomials. *J. Korean Math. Soc.* 50 (2013), no. 3, 641-693.

⑩ T. Kohno, Homological representations of braid groups and KZ connections, *Journal of Singularities*, 5, (2012), 94--108.

⑪ T. Kohno, Quantum and homological representations of braid groups, *Edizioni della Normale* (2012), 355--372.

⑫ T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 62, (2012), 157--174.

⑬ T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 62, (2012), 157--174.

⑭ J. Murakami, Volume formulas for a spherical tetrahedron. *Proc. Amer. Math. Soc.* 140 (2012), no. 9, 3289--3295.

⑮ K. Matsumoto, T. Terasoma, Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines. *J. Reine Angew. Math.* 669 (2012), 121--149.

⑯ T. Terasoma, Varieties of lines on Fermat hypersurfaces. *Arrangements of hyperplanes*,

Adv. Stud. Pure Math., 62, (2012), 459--474.

⑰ K. Saito, Opposite power series. *European J. Combin.* 33 (2012), no. 7, 1653--1671.

⑱ H. Terao, The Shi arrangements and the Bernoulli polynomials. *Bull. Lond. Math. Soc.* 44 (2012), no. 3, 563--570.

⑲ T. Abe, H. Terao, A. Wakimoto, Equivariant multiplicities of Coxeter arrangements and invariant bases. *Adv. Math.* 230 (2012), no. 4-6, 2364--2377.

⑳ D. Tamaki, On the homology of configuration spaces associated to centers of mass. *Arrangements of hyperplanes*, *Adv. Stud. Pure Math.* 62, (2012), 417--457.

㉑ L. Funar, T. Kohno, Free subgroups within the images of quantum representations, *Forum Mathematicum* (2011), Published on line DOI 10.1515/FORM.2011.162.

㉒ K. Saito, Coxeter elements for vanishing cycles of types A_{12}^∞ and D_{12}^∞ . *Ann. Inst. Fourier* 61 (2011), no. 7, 2959--2984.

㉓ K. Saito, T. Ishibe, Monoids in the fundamental groups of the complement of logarithmic free divisors in C^3 . *J. Algebra* 344 (2011), 137--160.

㉔ T. Abe, H. Terao, Primitive filtrations of the modules of invariant logarithmic forms of Coxeter arrangements. *J. Algebra* 330 (2011), 251--262.

[学会発表] (計 26 件)

① T. Kohno, Holonomy of braids and its 2-category extension, *Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology*, Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, September 7 -- September 10, 2015.

② T. Kohno, Holonomy of braids and its 2-category extension, *Integrability in Algebra, Geometry and Physics: New Trends*, Congressi Stefano Franscini, Switzerland, July 13 -- July 17, 2015.

③ T. Terasoma, "A construction of an algebraic surface with a big higher Chow group", Mini-workshop on Calabi-Yau varieties; arithmetic, geometric and physics, Tsuda College, August 2015.

④ T. Kohno, Conformal blocks and homological representations of braid groups, *Perspectives in Lie theory - Combinatorics and Hyperplane Arrangements*, Centro de Giorgi, Pisa, Italy, February 17 -- 20, 2015.

- ⑤ T. Kohno, Higher holonomy of braids, Tenth East Asian School of Knots and Related Topics, East China Normal University, Shanghai, China, Jan 26 -- 29, 2015
- ⑥ T. Kohno, Braids, quantum symmetry and hypergeometric integrals, "Topology and Integrability" Loughborough University, UK, January 5 -- 8, 2015.
- ⑦ T. Terasoma, Mixed elliptic motives and depth filtration of multiple zeta values, Arithmetic and Algebraic Geometry 2015, January 27, 2015, 東京大学数理解科学研究科
- ⑧ T. Terasoma, Period map of mixed Hodge structures for certain triple coverings, Moduli and Integrable systems, February 17, 2015, 津田塾大学
- ⑨ T. Kohno, Interaction between geometry and quantum field theory, A3 Foresight Program Conference on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems International Convention Center, Jeju, Korea, November 21 -- November 23, 2014.
- ⑩ T. Kohno, 反復積分と de Rham ホモトピー理論, 日本数学会秋季総合分科会, 企画特別講演, 広島大学, September 25 -- 28, 2014.
- ⑪ T. Kohno, Conformal block bundles and Gauss-Manin connections, 第9回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学, February 17 -- 20, 2014.
- ⑫ T. Terasoma, Depth filtration of multiple zeta values and Tate curves, Conference on Hodge Theory and L^2 -cohomology, November 22, 2014, Johns Hopkins University.
- ⑬ T. Terasoma, Depth filtration and mixed elliptic motives, Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives II, December 3, 2014, ICMAT, Madrid
- ⑭ T. Kohno, Discriminantal arrangements and fusion rules in WZW model, Hyperplane arrangements and characteristic classes, RIMS, Kyoto University, November 11 -- 15, 2013.
- ⑮ T. Kohno, Braids, quantum symmetry and hypergeometric integrals, 日本数学会秋季総合分科会, 特別講演, 愛媛大学, September 24 -- 27, 2013.
- ⑯ T. Kohno, Geometric representation theory of braid groups related quantum groups and hypergeometric integrals, Geometry and Dynamics, The University of Tokyo, September 15 -- 16, 2013.
- ⑰ T. Kohno, Monodromy groups of conformal field theory, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics, Session in Mathematical Physics, Sapporo, July 1 -- 5, 2013.
- ⑱ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups and hypergeometric integrals, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics, plenary talk, Sapporo, July 1 -- 5, 2013.
- ⑲ T. Kohno, Quantum symmetries in

homological representations of braid groups and applications, Joint International Meeting of American Mathematical Society and Romanian Mathematical Society, Alba-Iulia, Romania, June 27 -- August 1, 2013.

⑳ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups, "Quantization of Teichmuller spaces", Erwin Schrodinger Institute, Vienna, April 15 -- 19, 2013.

㉑ T. Kohno, Homological representations of braid groups and KZ connections, "Braid groups and configuration spaces", 6th European Congress of Mathematics, Krakow, Poland, July 2 -- 6, 2012.

㉒ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups and applications, Geometric Group Theory, RIMS Kyoto University, June 4 -- 8, 2012.

㉓ T. Kohno, Quantum and homological representations of braid groups, Low Dimensional Topology and Number Theory IV, Kyushu University, March 12 -- 15, 2012.

㉔ T. Kohno, Quantum and homological representations of braid groups, East Asian School of Knots and Links, KAIST, Daejeon, January 9 -- 12, 2012.

㉕ T. Kohno, Morse-Novikov theory for hyperplane arrangements, "Hyperplane arrangements and applications", PIMS, University of British Columbia, August 8 -- 12, 2011.

㉖ T. Kohno, Monodromy groups of conformal field theory, "Singularity theory and its applications", Chinese University of Science and Technology, Hefei, July 25 -- 31, 2011.

〔図書〕 (計 1 件)

河野俊丈, 「結晶群」共立出版, 2015 年, 200 ページ.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 出願年月日 :
 国内外の別 :

○取得状況 (計 件)

名称 :
 発明者 :
 権利者 :
 種類 :
 番号 :
 出願年月日 :

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河野 俊丈 (KOHNO, Toshitake)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号： 8 0 1 4 4 1 1 1

(2) 研究分担者

寺杣 友秀 (TERASOMA, Tomohide)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号： 5 0 1 9 2 6 5 4

(3) 連携研究者

齋藤 恭司 (SAITO, Kyoji)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・

教授

研究者番号： 2 0 0 1 2 4 4 5

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号： 9 0 1 5 7 7 5 1

村上 順 (MURAKAMI, Jun)

早稲田大学・理工学術院基礎理工学部・

教授

研究者番号： 9 0 1 5 7 7 5 1

玉木 大 (TAMAKI, Dai)

信州大学・理学部・教授

研究者番号： 1 0 2 5 2 0 5 8