

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340015

研究課題名(和文)フレア理論の研究とミラー対称性予想およびシンプレクティック幾何への応用

研究課題名(英文)Floer theory, mirror symmetry conjecture and applications to symplectic geometry

研究代表者

太田 啓史(Ohta, Hiroshi)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：50223839

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,400,000円

研究成果の概要(和文)：ラグランジアン部分多様体に対し、それを境界条件とする2次元円板からの正則写像のモジュライ空間を用いて、我々はA無限大代数を構成しその基礎理論を構築したが、本研究課題ではその応用、特にミラー対称性予想への応用を中心に研究した。任意のコンパクトトーリック多様体の大量子コホモロジー環とポテンシャル関数のヤコビ環との同型、およびフロベニウス多様体構造の対応を示した。更に、圏論レベルでの同型(ホモロジー的ミラー対称性)について研究し、シンプレクティック多様体の深谷圏の生成判定条件を得た。これらの研究ではモジュライ空間の仮想チェインの方法が使われるが、そのために倉西構造の理論の整備拡張も平行して行なった。

研究成果の概要(英文)：We had established the fundamental theory of Lagrangian intersection Floer theory based on the filtered A infinity algebra in the last decade. In this research period, we studied its applications, especially to the mirror symmetry conjecture. We proved a ring isomorphism between the big quantum cohomology of any compact smooth toric manifold and the Jacobian ring of the potential function which we introduced from the context in the Lagrangian Floer theory. Moreover, we studied the correspondence of the Frobenius manifold structures between them. We went further to study of equivalence at (derived) categorical level, so called homological mirror symmetry conjecture. We showed generation criteria for the Fukaya category of compact symplectic manifold and obtained a generator for compact toric manifold. We used the virtual fundamental chain technique to obtain these results. For this purpose we also provided the technical details of the theory of Kuranishi structure and brushed it up.

研究分野：幾何学

キーワード：シンプレクティック幾何本類 トーリック多様体 フレア理論 フロベニウス多様体構造 ミラー対称性 ラグランジュ部分多様体 倉西構造 仮想基

### 1. 研究開始当初の背景

本研究課題の当初連携研究者でもあった深谷賢治氏(元京都大学, 現在Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook大, 米国)、現在も連携研究者である小野薫氏(京都大数理解析研究所)、およびYong-Geun Oh氏(Institute for Basic Science, Center for Geometry and Physics, 韓国)と1996年以来行なっている共同研究により、ラグランジアン部分多様体を境界条件とする擬正則円盤のモジュライ空間を用いてラグランジアン Floer コホモロジー理論の障害理論と変形理論を展開してきた。その一般基礎理論は2009年に2巻本としてAmerican Mathematical Society and International Press から出版されている。本研究課題は、その一般基礎理論を元に、その具体的な応用を目指すものである。

本研究課題開始前に、既に我々は、コンパクトトーリック多様体のラグランジアントラスファイバーに対して、そのポテンシャル関数を決定し、そのフレアコホモロジーの計算、non-displaceable ラグランジアントラスファイバーを具体的に求める方法などを確立しており、シンプレクティック幾何の具体的な問題に顕著な応用をいくつか得ていた。

そこで、本研究課題においては、更にその応用を広め深めることであった。特にミラー対称性予想への応用は最も重要な課題であると位置づけられた。

### 2. 研究の目的

以上の背景のもとで、当初予定していた研究目的で最も重要なものは、

「トーリック多様体の場合のミラー対称性予想の解明」

である。これにはいくつかの側面とレベルが存在する。それをもう少し詳しく述べれば、

- (1) ホモロジー的ミラー対称性予想の解明
- (2) トーリック多様体の大量子コホモロジー環とポテンシャル関数のヤコビ環との環同型を通して、両者のフロベニウス多様体構造の対応関係を調べる。

の2つを研究目的として考えていた。

ところが、本研究課題開始の2011年度3月(すなわち2012年3月)に、プリンストン高等研究所において行なわれていたシンプレクティック幾何関連のアクティビティ期間中に、ホォファー、マクダフ、ウエルヘルムにより、仮想基本類を扱う一つの理論である倉西構造の理論の基礎についてその技術的な細部に対して疑問と質問が提出された。我々はその基礎付けに関する質問に対し詳細に解答することとなった。そのため、倉西構造の基礎部分について、その詳細を書き、理論を整理する仕事は今後の研究を円滑に推進させるために不可避であると考え、倉西構造の理論の整備、拡張を本研究目的に加えることとした。

### 3. 研究の方法

トーリック多様体のミラー対称性予想の研究については、物理でいうところの

Landau-Ginzburg スーパーポテンシャルをラグランジアンフレア理論の文脈で我々は既に理解することができていたが、ファノとは限らない一般のトーリック多様体の場合はローラン多項式にはならずあるローラン級数となり、我々は普遍ノビコフ環の非アルキメデスの付値とモメント多面体を用いた位相を導入することにより、完備化を精密に行なう必要がある。その状況で閉開写像を精緻に解析することによって環同型、およびフロベニウス多様体構造の対応が証明される。

この閉開写像の同型を用いて、ホモロジー的ミラー対称性予想を解くことを考える。そのために、コンパクトなトーリック多様体の深谷圏の生成元を同定する必要がある。それについては、まず一般論としてコンパクトシンプレクティック多様体の深谷圏の生成判定条件を見出す必要がある。これについては、現在コロロンビア大のM. Abouzaid氏が完全シンプレクティック多様体の中の完全ラグランジアン部分多様体という強い制約の元で生成判定条件を得ていたもので、その考え方をコンパクトシンプレクティック多様体の場合に適用することによって、生成判定条件を得ることを考える。ここで、我々が構築したラグランジアン部分多様体のA無限大代数の基礎理論がフルに使われる。

上記のミラー対称性予想の研究を遂行するためにも、倉西構造の理論が広く受け入れられている必要がある。技術的と思われる細部に対しても、その詳細が書かれた文献があった方が論文を執筆する際引用もしやすいし、余計な労力を繰り返す必要がなくなると思われる。

そのために、まず、技術的細部の詳細まで論理的に隙のない形で書いた文献を一つ作り上げ、次にいろいろな議論や命題、概念を使いやすい形でパッケージ化して整理した文献を書くことを計画した。後半は、倉西構造の理論が広く使われるようになる際に有効であろうと考える。

#### 4. 研究成果

トーリック多様体のミラー対称性予想については、まず、任意のコンパクトトーリック多様体に対して、その大量子コホモロジー環とポテンシャル関数のヤコビ環のしかるべき完備化が、閉開写像を通して環同型になること、およびフロベニウス多様体構造の間の対応の証明を書いた論文を完成させ投稿し、レフェリーの要求に応じて加筆修正作業をおこなった。その結果フランス数学会 Asterisque から出版の accept を受け取ることができた。

ホモロジー的ミラー対称性予想に研究については、現在コロンビア大の M. Abouzaid 氏との共同研究により、任意のコンパクトシンプレクティック多様体に対する深谷圏の生成判定条件を得ることができ、それについては論文を執筆中であるがまだ公表するには至っていない。この判定条件と先の閉開環同型写像を用いれば、任意のコンパクトトーリック多様体に対して深谷圏の生成元を具体的に与えることができる。

倉西構造の基礎理論については、まず、

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,

Technical details on Kuranishi structure and virtual fundamental chain, preprint, arXiv1209.4410, p.257. (2012)

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,

Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures. arXiv:1405.1755, p.17. (2014)

をウェブ上で公開し、論文 については専門雑誌に投稿中である。

次に倉西構造の基礎理論のパッケージ化のための文書の第一弾として

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,

Kuranishi structure, pseudo-holomorphic curve and virtual fundamental chain, Part 1. arXiv:1503.0763, p.203. (2015).

をウェブ上で公開した。

他にも、トーリック退化とバルク変形を用いて  $S^2 \times S^2$  の中に non-displaceable なラグランジアントーラスが非可算無限個存在することを示した論文を出版することができ、また、整数係数上のラグランジアンフレア理論を(ある種の正值性を有する)シンプレクティック多様体に対して展開して、その論文を出版することができた。

以上は深谷賢治氏 (Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook 大, 米国)、小野薫氏 (京都大数理解析研究所)、および Yong-Geun Oh 氏 (Institute for Basic Science, Center for Geometry and Physics, 韓国)との共同研究の成果である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds, p.324.

Accepted to be published in Asterisque. (2015 年以降出版予定). 査読有

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono, Lagrangian Floer theory over integers: Spherically positive symplectic manifolds.

Pure and Applied Mathematics Quarterly, vol 9, No. 2 (Special Issue: In Honor of Dennis Sullivan), 189-289. (2013). 査読有

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono, Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory.

J. Symplectic Geom. vol 11, No 2, 231-268. (2013). 査読有

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,

Toric degeneration and non-displaceable  
Lagrangian tori in  $S^2 \times S^2$ .  
International Mathematics Research  
Notices vol 2012, No. 13, 2942-2993. (2012).  
査読有

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,  
Lagrangian Floer theory on compact toric  
manifolds: survey.  
Surveys in Differential Geom., vol XVII,  
229-298. (2012). 査読有

Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta and Kaoru Ono,  
Lagrangian Floer theory on compact toric  
manifolds II: bulk deformations.  
Selecta Mathematica New Series, vol 17, No  
3, 609-711. (2011). 査読有

[学会発表](計 19 件)

Hiroshi Ohta, Trace map in cyclic  
 $A_{\infty}$  category.  
(International Conference on "Primitive  
Forms, Mirror Symmetry and Related Topics  
2014", Kyoto University).  
2014 年 12 月 24 日

Hiroshi Ohta, Open-closed map in  
Lagrangian Floer theory and applications.  
(`Mathematics Inspired by String Theory",  
Tsinghua Sanya International Mathematics  
Forum (TSIMF), Sanya, China).  
2014 年 12 月 8 日

Hiroshi Ohta, Generation of Fukaya  
category and potential function.  
(Seoul ICM 2014 Satellite Conference  
"Homological Mirror Symmetry and  
Symplectic Topology", Center for Geometry  
and Physics, POSCO International Center,  
Pohang, Korea).  
2014 年 8 月 4 日

Hiroshi Ohta, Generation of Fukaya  
category and potential function.  
(`Mathematics New GOals", NCTS(South)  
Geometry Conference, National Cheng Kung  
University, Tainan, Taiwan).  
2014 年 6 月 30 日

Hiroshi Ohta, Topological Background  
of Algebra, revisited. (服部晶夫先生研  
究報告会「トポロジーの動向と展望」)  
(University of Tokyo).  
2014 年 6 月 27 日

Hiroshi Ohta, Mirror symmetry and  
Lagrangian Floer theory.  
(幾何セミナー, 名古屋大学).  
2014 年 4 月 15 日

Hiroshi Ohta, Frobenius manifold  
structure and Lagrangian Floer theory for  
toric manifolds.  
(International Conference on "Primitive  
Form", Kavli IPMU, University of Tokyo,  
Kashiwa, Japan).  
2014 年 2 月 11 日

Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory  
and Homological Mirror Symmetry.  
(Conference on "Calabi-Yau Geometry and  
Mirror Symmetry", National Taiwan  
University, Taipei, Taiwan).  
2014 年 1 月 6 日

Hiroshi Ohta, Mirror symmetry and  
Lagrangian Floer theory.  
(Tokyo-Seoul Conference in Mathematics  
--Differential Geometry--, University of  
Tokyo).  
2013 年 11 月 30 日

Hiroshi Ohta, Singularity theory  
arising from Lagrangian Floer theory.  
(Workshop on primitive forms, 函館).  
2012 年 11 月 21 日

Hiroshi Ohta, Involution and  
Lagrangian Floer theory.  
(研究集会「Geometry and Something」, 福  
岡大セミナーハウス).  
2012 年 11 月 2 日

Hiroshi Ohta, Residue pairing and Floer  
theory for toric manifolds.  
(Conference on "Mirror Symmetry and  
Related Topics", Kunming University of  
Science and Technology (KUST), Kunming,  
China).  
2012 年 8 月 21 日

Hiroshi Ohta, Lagrangian intersection  
Floer theory on toric manifolds 3,  
(International Conference on "Branched  
Coverings, Degenerations, and Related  
Topics 2012", Hiroshima University,  
Hiroshima).  
2012 年 3 月 7 日

Hiroshi Ohta, Lagrangian intersection Floer theory on toric manifolds 2, (International Conference on 'Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012', Hiroshima University, Hiroshima).  
2012年3月6日

Lagrangian intersection Floer theory on toric manifolds 1, (International Conference on 'Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012', Hiroshima University, Hiroshima).  
2012年3月5日

Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds and related topics, IV. (Lecture series at KIAS, Seoul, Korea).  
2011年9月23日

Hiroshi Ohta, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds and related topics, II. (Lecture series at KIAS, Seoul, Korea).  
2011年9月9日

Hiroshi Ohta, Fixed point sets of anti-holomorphic involutions. (Workshop on Symplectic Field Theory V, Lagrangian Floer homology - computations and applications, Universität Hamburg, Germany).  
2011年8月23日

Hiroshi Ohta, Mirror symmetry for smooth compact toric manifolds. (Conference on Symplectic topology and contact topology, POSTECH, Pohang, Korea).  
2011年8月16日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

太田 啓史 (OHTA HIROSHI)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：50223839

### (2) 連携研究者

深谷 賢治 (FUKAYA KENJI)  
(申請時) 京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：30165261  
(現在) Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook 大, 教授

小野 薫 (ONO KAORU)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：20204232

菅野 浩明 (KANNO HIROAKI)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：90211870