

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 20 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340033

研究課題名(和文) 擬微分作用素と幾何解析

研究課題名(英文) Pseudodifferential Operators and Geometric Analysis

研究代表者

千原 浩之 (CHIHARA, Hiroyuki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70273068

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,000,000円

研究成果の概要(和文)：2-4階の分散型写像流の初期値問題の解法(解の存在定理)について考察し、定義域の多様体や標的多様体の幾何学設定を線型偏微分方程式論の観点からほぼ限界まで緩和した状況下での初期値問題の解の存在定理をほぼ完成することができた。例えば、2階の方程式であるシュレーディンガー写像の方程式については、定義域が一般の閉リーマン多様体で標的多様体がコンパクトな概エルミート多様体であるという設定の元で、初期値問題の解の存在定理を確立した。これは、方程式が意味をなす範囲においては幾何学的に一切の制約がない場合でも肯定的な結果が得られることを意味しており、従来の制約下での研究から著しく進歩したことになる。

研究成果の概要(英文)：We studied the initial value problem for dispersive flows of second, third and fourth orders from a point of view of geometric analysis and linear partial differential equations. We established the existence theorems for dispersive flows under the almost minimum restrictions on the geometric settings of the source and target manifolds. For example, we studied the second order equation which is called the Schroedinger map equation, whose solutions describe the flow from a closed Riemannian manifold to a compact almost Hermitian manifold, and succeeded in establishing the short-time existence theorem. This means that our geometric settings have no restriction as far as the description of the equation makes sense. In previous studies, the source manifold is supposed to be a circle (the one-dimensional torus) or an Euclidean space, and the target manifold is assumed to be a Kaehler manifold. For this reason, our results can be said to be big improvements.

研究分野：幾何解析

キーワード：分散型写像流 バークマン変換 初期値問題 テープリッツ作用素 幾何解析

1. 研究開始当初の背景

本研究では、以下の2つを主な研究対象としている：

- 分散型とよばれる時間発展型の偏微分方程式(系)、および、分散型偏微分方程式系にしたがう多様体間の写像流(分散型写像流)の数学解析。
- バークマン型変換とよばれる複素数値相関数をもつユークリッド空間上のフーリエ積分を通じた超局所解析・準古典解析の大域的手法の発展、および、曲がった空間上での類似の大域的手法の基礎理論の構築。

研究開始当初の状況を述べる。

まず分散型偏微分方程式とは、時間発展型の偏微分方程式であって、時間変数の微分の最高階よりも空間変数の微分の最高階の方が真に大きいものであり、初期値問題が未来にも過去にも一意可解となることが期待されるものである。量子力学のシュレーディンガー発展方程式、および、古典力学の非線型波動分野に現れる KdV 方程式は、分散型偏微分方程式の代表的な例である。最も基本的かつ重要な課題は線型シュレーディンガー発展方程式の初期値問題が一意可解となるための必要十分条件の考察であろう。この問題は 1980 年ごろの溝畑茂らの研究以来の伝統があるが、ユークリッド空間上でも完全な解決は極めて困難であることが予想されるものの、閉リーマン多様体であれば一定の成果が期待される研究課題である。実際、研究代表者の研究(2002)では平坦トーラス上でこの本題を解決している。この問題では、閉測地線に沿う考察が極めて重要であるので、一般の閉リーマン多様体上では研究をすすめるのが困難であっても、コンパクトなリーマン対称空間であれば一定の成果が期待されると思われる。

一方、分散型写像流の方程式の代表的なものは渦糸や磁石のモデルの定式化で現れる 2-4 階の 2 次元球面值モデルである。特に 2 階の方程式はシュレーディンガー写像の方程式とよばれる。標的多様体を 2 次元球面から幾何学的に一般化して考察することにより、方程式の構造に関する深い知見が期待される。研究開始当初の状況は、定義域が実数直線か 1 次元トーラス(円)で、標的多様体がコンパクトなケーラー多様体の場合のシュレーディンガー写像の方程式のみ盛んに考察されていた。標的多様体にケーラー性が仮定されると、古典的エネルギー法が機能するので、偏微分方程式論の観点が必要ない簡単な方程式になるからである。

バークマン型のフーリエ積分作用素の最も基本的なものは、ユークリッド空間上の二乗可積分関数のなすヒルベルト空間の完全正規直交系であるエルミート関数系の簿関数によってユークリッド空間上の関数を複

素ユークリッド空間上の整関数に写す積分変換である。このような道具を通じた超局所解析・準古典解析の大域的手法の研究開始当初の状況は、ユークリッド空間上では数多くのめざましい成果があつて、その当ても現在でもまだ進行中である。しかし、微分作用素への応用以外の研究成果はほとんど存在せず、さらに曲がった空間でのこの種の大域的な方法というのは全く存在しなかった。

2. 研究の目的

本研究は、曲がった空間でも有効かつ明快な解析学の手法を構築することを最大の目的とする。分散型偏微分方程式の超局所解析および分散型写像流の幾何解析を主な具体例として汎用性の高い手法の構築を目指す。

3. 研究の方法

まず既存の情報の収集や技術の習得し、研究が進みそうな部分から取り組む。そのために、研究集会等に参加して最先端の情報収集を行ったり、関連する研究を行っている人々と議論したり、可能なことを継続して実施する。

4. 研究成果

研究代表者が直接関わった研究成果のみ述べることにする。

分散型写像流の幾何解析については、研究代表者、および、研究分担者の小野寺栄治による単独研究あるいは共同研究により、一定の成果が得られた。具体的には、古典物理学のモデルを幾何学的に最大限に一般化された 2-4 階の分散型写像流の方程式の初期値問題の解法がほぼ完成しつつある。「最大限に一般化」というのは、2-3 階の方程式のように方程式が意味をなす限界まで一般化した設定でも短時間解の存在定理が確立できる場合もあれば、現在進行中の問題である 4 階の方程式の場合のように標的多様体が定曲率リーマン面でなければ解の存在定理はほとんど期待できないことを解明して研究を進めている。特に、2 階の方程式であるシュレーディンガー写像の方程式の場合、閉リーマン多様体からコンパクトな概エルミート多様体への写像流という最大限に一般化した設定で解の存在定理を確立し、従来の設定を大幅に改善した。

一方、ユークリッド空間上のバークマン型変換と関連する研究について述べる。ドブシーの局所化とよばれる超局所化作用素について、従来の研究では相平面上の円または球対称な表象に対して固有値や固有関数系を決定する問題、および、固有値や固有関数系から表象を決定する問題が詳しく研究されてきたが、円というのはバークマン変換に付随する正準変換から自然に定まるものであることによる。研究代表者はバークマン変換とは相性の悪い一般の楕円の場合を考察し、固有値や固有関数系のすべてを決定することはできなかったが、一部分については求め

ることに成功した。但し、相性の悪さから、これ以上の進展は望めそうにはない。また、研究協力者 芳野和久氏 (筑波大学 M1) とゲルファント・シロフのクラスとその位相的対称およびゲルファント・シロフの意味での波面集合の特徴づけに関して成果が得られつつある。これらの成果は分散型偏微分方程式の解の平滑化効果とよばれる現象の超局所解析へと発展させる予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Hiroyuki Chihara, *Fourth-order dispersive systems on the one-dimensional torus*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 印刷中, 査読あり, DOI: 10.1007/s11868-015-0112-1
- ② Hiroyuki Chihara and Eiji Onodera, *A fourth-order dispersive flow into Kähler manifolds*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 34 巻, (2015), 221-249 頁, 査読あり, DOI: 10.4171/ZAA/1537
- ③ Tomoyuki Kakehi, *Schrödinger equations on compact symmetric spaces and Gauss sums*, Advanced Studies in Pure Mathematics, 64 巻 (2015), 311-318 頁, 査読あり
- ④ Adam Harris and Kimio Miyajima, *Involutive deformations of the regular part of a normal surfaces*, Topics on real and complex singularities, Proceedings of the 4th Japanese-Australian Workshop, edited by S. Koike et al, (2014), 51-59 頁, 査読あり.
- ⑤ Koichi Kaizuka, *Resolvent estimates on symmetric spaces of noncompact type*, Journal of Mathematical Society of Japan, 66 巻 (2014), 895-926 頁, 査読あり, DOI: 10.2969/jmsj/06630895
- ⑥ Hiroyuki Chihara, *Schrödinger flow into almost Hermitian manifolds*, Bulletin of the London mathematical Society, 45 巻 (2013), 37-51 頁, 査読あり, DOI: 10.1112/blms/bds060
- ⑦ Tomoyuki Kakehi, *Magnetic Schrödinger equation on compact symmetric spaces and the geodesic Radon transform of one forms*, Contemporary Mathematics, 598 巻 (2013), 129-138 頁, 査読あり.

- ⑧ Minoru Itoh, *Extensions of the tensor algebra and their applications*, Communications in Algebra, 40 巻 (2012), 3442-3493 頁, 査読あり, DOI: 10.1080/00927872.2011.590952
- ⑨ Eiji Onodera, *A curve flow on an almost Hermitian manifold evolved by a third order dispersive equation*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 55 巻 (2012), 137-156 頁, 査読あり, <http://www.math.sci.kobe-u.ac.jp/~fe/xml/mr2976046.xml>
- ⑩ Tomoyuki Kakehi, *Support theorem for the fundamental solution to the Schrödinger equation on certain compact symmetric spaces*, Advances in Mathematics, 226 巻 (2011), 2739-2763 頁, 査読あり, DOI: 10.1016/j.aim.2010.10.003

[学会発表] (計 64 件)

- ① Hiroyuki Chihara, *Fourth-order linear dispersive systems and dispersive flows into Riemann surfaces*, Geometric and Singular Analysis, 2015 年 2 月 9 日～2015 年 2 月 13 日, University of Potsdam, ポツダム, ドイツ連邦共和国, 招待講演.
- ② Koichi Kazuka, *Asymptotic properties of solutions of the Helmholtz equation on symmetric spaces of noncompact type*, Lie Group Seminar, 2015 年 3 月 18 日, Massachusetts Institute of Technology, ボストン, アメリカ合衆国, 招待講演.
- ③ 貝塚公一, *Scattering theory for the Laplacian on symmetric spaces of noncompact type and its application*, 第 53 回 実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2014 年 9 月 3 日～2014 年 9 月 5 日, 学習院大学, 豊島区, 東京都, 招待講演.
- ④ Tomoyuki Kakehi, *Fundamental solution of Schrödinger equation on symmetric spaces*, Inverse Problems and Related Topics, Euler Mathematical Institute, 2014 年 8 月 18 日～2014 年 8 月 22 日, サンクト・ペテルスブルク, ロシア連邦, 招待講演.
- ⑤ Hiroyuki Chihara, *Schrödinger flow into almost Hermitian manifolds*, Geometric and Singular Analysis, 2014 年 3 月 24 日～2014 年 3 月 28 日, ポツダム大学, ポツダム, ドイツ連邦共和国, 招待講演.

- ⑥ Tomoyuki Kakehi, *Schrödinger equation on compact symmetric spaces and reciprocity for Gauss sums*, Geometric and Singular Analysis, 2014年3月24日～2014年3月28日, ポツダム大学, ポツダム, ドイツ連邦共和国, 招待講演.
- ⑦ Hiroyuki Chihara, *Fourth-order linear dispersive systems and dispersive flows into Riemann surfaces*, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 2013年11月19日～2013年11月20日, 東京理科大学, 野田, 千葉県, 招待講演.
- ⑧ Tomoyuki Kakehi, *On the support of the fundamental solution to the Schrödinger equation on certain compact symmetric spaces*, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 2012年11月21日～2012年11月22日, 東京理科大学, 野田, 千葉県, 招待講演.
- ⑨ Kimio Miyajima, *Introduction to s.p.c. structures and their deformations*, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 2013年11月19日～2013年11月20日, 東京理科大学, 野田, 千葉県, 招待講演.
- ⑩ Hiroyuki Chihara, *Fourth-order linear dispersive systems and dispersive flows into Riemann surfaces*, Joint CRM-ISAAC Conference on Fourier Analysis and Approximation Theory, 2013年11月4日～2013年11月8日, Centre de Recerca Matemàtica, バルセロナ, スペイン, 招待講演..
- ⑪ Kimio Miyajima, *CR approach to deformation of normal isolated singularities*, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, 2013年9月9日～2013年9月13日, University of Sydney, シドニー, オーストラリア, 招待講演.
- ⑫ Tomoyuki Kakehi, *Magnetic Schrödinger equation on compact symmetric spaces*, Analysis, Geometry and Group Representation for Homogeneous Spaces, JSPS-NOW Seminar, 2013年8月26日～2013年8月30日, 名古屋大学, 名古屋, 愛知県, 招待講演.
- ⑬ Eiji Onodera, *A fourth-order dispersive curve flow on compact Kähler manifolds*, The 30th Kyushu Symposium on Partial Differential Equations, 2013年1月29日～2013年1月31日, 福岡大学, 福岡, 福岡県, 招待講演.
- ⑭ Tomoyuki Kakehi, *Schrödinger equation on compact symmetric spaces and reciprocity for Gauss sums*, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 2013年11月19日～2013年11月20日, 東京理科大学, 野田, 招待講演.
- ⑮ Minoru Itoh, *Invariant Theory for Exterior Algebras*, International Conference on Geometry, Number Theory and Representation Theory, 2012年10月10日～2012年10月12日, Inha University, 仁川広域市, 大韓民国, 招待講演.
- ⑯ Minoru Itoh, *Invariant Theory for Exterior Algebras*, The 7th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar, 2012年2月14日～2012年2月17日, 鹿児島大学, 鹿児島, 鹿児島県, 招待講演.
- ⑰ Tomoyuki Kakehi, *Schrödinger equation on certain compact symmetric spaces*, The American Mathematical Society Annual Meeting, AMS Special Session on Radon Transforms and Geometric Analysis (in honor of Sigurdur Helgason's 85th birthday), 2012年1月4日～1月7日, John B. Hynes Veterans Memorial Convention Center, Boston Marriott Hotel, and Boston Sheraton Hotel, ボストン, アメリカ合衆国, 招待講演.
- ⑱ Eiji Onodera, *A third order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds*, Linear and Nonlinear Waves No.9, 2011年11月2日～2011年11月4日, ピアザ淡海 (滋賀県立県民交流センター), 大津, 滋賀県, 招待講演.
- ⑲ 寛知之, *コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解とガウス和*, 日本数学会秋季総合分科会 函数解析学分科会 特別講演, 2011年9月28日～2011年10月1日, 信州大学, 松本, 長野県, 招待講演.
- ⑳ Tomoyuki Kakehi, *Fundamental solution to the Schrödinger equation on certain compact symmetric spaces*, The Mathematical Society of Japan International Workshop, The 4thMSJ-SI Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011年9月12日～2011年9月

21日、九州大学、福岡、福岡県、招待講演.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1)研究代表者

千原 浩之 (CHIHARA, Hiroyuki)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：70273068

(2)研究分担者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA, Kimio)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：40107850

(平成25年度まで)

笥 知之 (KAKEHI, Tomoyuki)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：70231248

伊藤 稔 (ITOH, Minoru)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60381141

小野寺 栄治 (ONODERA, Eiji)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授

研究者番号：70532357

貝塚 公一 (KAIZUKA, Koichi)

学習院大学・理学部・助教

研究者番号：30737549

(平成26年度から)

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

芳野 和久 (YOSHINO, Kazuhisa)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・

博士前期課程1年

(平成26年度から)