

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 22 日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340034

研究課題名(和文)実関数論的手法による調和解析とその応用

研究課題名(英文)Harmonic analysis by real variable methods and its applications

研究代表者

宮地 晶彦(MIYACHI, Akihiko)

東京女子大学・現代教養学部・教授

研究者番号：60107696

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,900,000円

研究成果の概要(和文)：双線形フーリエ乗子作用素のルベグ空間およびハーディ空間での有界性の十分条件となるヘルマンダー＝ミーリン型条件に対して、直積型ソボレフ・ノルムを用いた場合の臨界の滑らかさの指数を決定した。線形の擬微分作用素に対するカルデラン＝バイランクールの定理の双線形作用素への一般化にあたる定理を示した。調和解析に現れる最大作用素などの種々の作用素について、種々の関数空間での新しい評価を得た。

研究成果の概要(英文)：Using product type Sobolev norm, we determined the critical differentiability orders in the Hormander-Mihlin type conditions for bilinear Fourier multiplier operators. We generalized the Calderon-Vaillancourt theorem for linear pseudo-differential operators to the case of bilinear pseudo-differential operators. We obtained several new estimates for various operators of harmonic analysis in various function spaces.

研究分野：調和解析学

キーワード：特異積分 擬微分作用素 フーリエ乗子 最大作用素 双線形作用素 ハーディ空間 パラプロダクト

1. 研究開始当初の背景

(1)調和解析に関連して登場する種々の関数空間の研究は、広く行われていたが、重み付き測度に関わる関数空間、モーレー空間、変動指数ルベグ空間などの研究では、実関数論の方法に技術的な様々の難しい点があり、容易には解決できないものと考えられていた。

(2)実関数論の手法による調和解析の研究で、種々の多重線形作用素の研究が盛んに行われていた。フーリエ乗子作用素に関しては、乗子が原点にのみ特異性を持つ Hormander-Mihlin 型の条件をみたす場合に、ルベグ空間での基本的な有界性の性質が古くから知られていたが、線形の場合に対応するような乗子の滑らかさに関する条件は詳しく調べられていなかった。多重線形の擬微分作用素に対しては、線形の擬微分作用素に対する Calderon-Vaillancourt の定理に相当する基本的な有界性の条件が知られていなかった。

(3)非線形の偏微分方程式の研究は、広く盛んに行われていて、調和解析で用いられる実関数論の手法や関数空間が頻繁に利用されていた。

2. 研究の目的

(1)種々の関数空間の性質を研究する。特に、領域上の重み付きハーディ空間の変数変換にかかわる性質、リトルウッド=ペーリー理論の成立する関数空間の一般論、多重線形型のモーレー空間などについて詳しく研究する。

(2)調和解析に現れる種々の作用素の性質を研究する。特に、領域上の重み付きハーディ空間での特異積分作用素と、多重線形の特異積分作用素の BMO 空間を含む評価などを研究する。

(3)偏微分方程式の理論へ関数空間と特異積分作用素の理論を応用する。特に、ラプラス方程式の境界値問題の解に対する重み付きハーディ空間での評価を確立する。

3. 研究の方法

(1)関数空間の性質の研究について。最大作用素や重みなど正值関数に関係する関数空間の性質の研究には、ポテンシャル論や確率論の手法を取り入れ、調和解析における実関数論の手法と合わせて検討する。ハーディ空間や BMO 空間に関わる種々の実関数論の手法を、変動指数のルベグ空間やモーレー空間の場合、マルチンゲールに関わる関数空間の場合へ拡張する。

(2)多重線形的作用素の研究には、時間周波数解析と呼ばれる調和解析の手法を詳しく検討し、最大関数とカールソン測度を利用する実関数論の方法を拡張する。リトルウッド=ペーリー作用素の研究では、特異積分の手法

を一般化して方法を用いる。多重線形の Fourier 乗子作用素に関しては、基本的なルベグ空間での有界性が成り立つために必要な乗子の滑らかさの仮定を精密に調べる。多変数 Fourier 級数に関する調和解析の古典的な問題には、計算機を使った実験的な計算を実行し、計算による理論を進める補助とする。

(3)非線形偏微分方程式の研究では、調和解析で現れる種々の不等式や種々の関数空間を偏微分方程式の解の性質の解明に応用する。偏微分方程式の解の数値計算に、関数空間における関数の近似の理論を応用する。

4. 研究成果

(1) 双線形フーリエ乗子作用素について。双線形フーリエ乗子作用素で、乗子が原点にのみ特異性をもち Hormander-Mihlin 型の条件をみたす場合に、対応する双線形フーリエ乗子作用素がルベグ空間で有界作用素となることは、古く Coifman-Meyer によって示されていた。さらに、Kenig-Stein と Grafakos-Kalton によって、ハーディ空間での有界性も示されていた。本研究では、これらの有界性を成立させるために乗子に課す Hormander-Mihlin 型条件において、微分可能性の仮定をどこまで緩められるか、という問題を追求し、或る設定の下で最良の結果を得た。我々は、双線形フーリエ乗子の滑らかさを直積型ソボレフ・ノルムを用いて測ることを考え、初めに 2 乗可積分関数の空間における基本的な有界性をシャープな微分可能性の条件の下で示すことに成功し、さらにその結果をルベグ空間とハーディ空間へ一般化して最良の結果を得た。ここで「シャープ」または「最良」という意味は、設定した直積型ソボレフ・ノルムを用いた滑らかさの測り方の中で臨界の指数を見いだしたという意味である。

双線形フーリエ乗子作用素で、乗子が原点にのみ特異性をもち Hormander-Mihlin 型の条件をみたす場合について、乗子の滑らかさを混合ベゾフノルムで測った場合についても、補間の方法を駆使して、臨界の滑らかさの条件を見いだすことができた。

Hormander-Mihlin 型の条件をみたすフーリエ乗子の研究において我々の用いた方法は、線形の特異積分作用素を扱うリトルウッド=ペーリー関数、最大関数、カールソン測度、などを用いる方法で、今後、更に種々の精密化が可能だと考えられる。また、臨界の指数そのもの場合に有界性が成り立つかどうかはわかっておらず、これも今後の課題である。

(2) 双線形擬微分作用素について。双線形擬微分作用素の有界性を保証するシンボルの条件について、乗子のすべての導関数が一定の多項式オーダーで減少する場合について、対応する双線形擬微分作用素がルベグ空間またはハーディ空間で有界となる場合の臨界のオーダーを決定し、さらに、その臨界のオーダーの場合にも有界性が成り立つことを示し

た。この結果は、Benyi らが部分的に得ていた結果を発展させたものであるが、我々の結果は、ハーディ空間の場合を含んでいること、臨界のオーダーを決定したこと、さらに、臨界のオーダーの場合にも有界性が成り立つことを示したことに於いて、既存の結果とは一線を画するものである。この結果は、線形の擬微分作用素の 2 乗可積分空間での有界性に関するカルデラン = バイランクールの古典的な結果の双線形作用素への一般化とあたる基本的な結果だと考えられる。

これに関連して、シンボルが Hormander クラスに属す双線形擬微分作用素の有界性の問題がある。我々はこの問題に対して、部分的な結果を得て、臨界のオーダーを予測することまではできたが、臨界のオーダーの場合に有界性が成り立つことは示すことができなかった。今後解明すべき興味深い問題である。

(3) 多重線形フーリエ乗子作用素について。上記(1)の双線形フーリエ乗子作用素に対する結果は、最近になって、本研究の研究者と海外の研究者との共同研究により、多重線形の場合にまで拡張できることがわかった。この研究は未発表である。

(4) 特異性をもつ多重線形フーリエ乗子作用素について。上記の(1), (3)のフーリエ乗子はいずれも原点以外には本質的な特異性を持たないものであるが、最近の多重線形フーリエ乗子作用素の研究では、乗子が定義域のユークリッド空間の部分空間に沿って特異性を持つ場合が興味深い研究対象となっている。我々は、そのような多重線形フーリエ乗子作用素のうち、Muscalu が導入したフラッグ・パラプロダクトと呼ばれる作用素の 3 重線形の場合を詳しく解析し、ルベグ空間とハーディ空間で成立する有界性を完全に決定した。この結果は未発表である。我々の扱ったフラッグ・パラプロダクトは、Germain-Masmoudi-Shatah らが非線形の波動方程式や非線形の Schrodinger 方程式を解析する中に登場した作用素を含んでいるので、これらの非線形偏微分方程式の解析に応用されることが期待できる。

(5) 最大関数などの関する実関数論の問題について。Hardy-Littlewood 最大作用素が重み付きのルベグ空間で有界となる場合の重み関数を特徴づけることについては、Muckenhoupt による古典的な結果がある。この結果を左辺と右辺に異なる重みをおいた場合へ拡張することも知られている。これらの結果をモーレー空間の場合へ拡張することは、基本的な実関数論の問題で、その結果の調和解析へ寄与するところは大きいと考えられるが、未解決である。この問題に対して我々は、正值ポテンシャルを用いて作用素を書き表す方法、マルティンゲールの手法などを用いて、興味深い部分的な結果をいくつか得た。また、掛合最大関数のルベグ空間での評価の問題は、現在の調和解析における最大の未解決問題であるが、これに関連して我々は、方向を

変化させる掛谷型最大作用素の 2 次元での評価と、掛谷型最大作用素の変動指数ルベグ空間での評価に関する結果を得た。

(6) 関数空間と種々の作用素の研究。変動指数の Hardy 空間の理論とその双対空間にあたる Campanato 空間の一般論を確立した。また Morrey 空間の種々の性質を調べ、Morrey 空間における分数階積分作用素の有界性の研究を、加法族の増加列の与えられた測度空間上でのある種の正值作用素に対する性質としてまとめ整備した。これには、マルティンゲールの考え方やポテンシャル論の方法を利用した。これらの結果をトレース作用素の評価に応用した。一般化したリエス・ポテンシャルに対するモーレー空間でのソボレフ型埋め込み定理を、ダブリング条件を満たさない一般の測度空間上で確立した。

(7) 実関数論の方法の非線形偏微分方程式への応用について。3次元の MHD 方程式の弱解の一意性に対して、オルリッチ = モーレー空間を利用した結果を得た。また、偏微分方程式の研究に現れるトレース作用素に対して、モーレー空間を利用した精密な評価を得た。特異積分作用素の積の各点評価の方法を非線形の偏微分方程式に現れる div-curl 不等式に応用して、臨界のべき型重みの場合の評価を得た。また、ユークリッド空間上の関数を、選ばれた観測点での関数値を利用して近似する問題を研究し、ベゾフ空間と補間の方法を利用して、観測点が不規則に分布する場合を含む結果を示した。この結果は、偏微分方程式の解の数値解析に応用されると期待できる。関数の積の微分に関わる或る双線形不等式を 2 進 BMO 空間において示し、その結果をナビエ・ストークス方程式の解析に応用した。

(8) 当初研究目的とした、領域上の重み付きハーディ空間の変数変換にかかわる性質、リトルウッド = ペーリー理論の成立する関数空間の一般論、ラプラス方程式の境界値問題の解に対する重み付きハーディ空間での評価については、目に見える新しい成果をあげることはできず、今後の研究課題として残ることになった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

A. Miyachi and N. Tomita, Boundedness criterion for bilinear Fourier multiplier operators, *Tohoku Mathematical Journal*, *Tohoku Math. J.*, 査読有, Vol. 66, 2014, pp. 55-76, <http://dx.doi.org/10.2748/tmj/1396875662>

Masato Kikuchi, On some inequalities for martingale transforms in Banach function spaces, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 査読有, Vol. 80, 2014, pp.

289-306,
DOI: 10.14232/actasm-012-542-3
H. Saito and H. Tanaka, The Kakeya maximal operator on the variable Lebesgue spaces, Archiv der Mathematik (Basel), 査読有, Vol. 103, 2014, pp. 481--491,
DOI: 10.1007/s00013-014-0709-2
H. Tanaka, A characterization of two-weight trace inequalities for positive dyadic operators in the upper triangle case, Potential Analysis, 査読有, Vol. 41, 2014, pp. 487--499,
DOI: 10.1007/s11118-013-9379-0
Yoshihiro Sawano and Hitoshi Tanaka, Fatou property of predual Morrey spaces with non-doubling measures, International Journal of Applied Mathematics, 査読有, Vol. 27, No. 3, 2014, pp. 283-296,
DOI: 10.12732/ijam.v27i3.8
Mitsuo Izuki, Yoshihiro Sawano, and Yohei Tsutsui, Variable Lebesgue norm estimates for BMO functions. II., Analysis Mathematica, 査読有, Vol. 40, No. 3, 2014, pp. 215-230,
DOI:10.1007/s10476-014-0304-6
Takeshi Iida, Yoshihiro Sawano, and Hitoshi Tanaka, Atomic decomposition for Morrey spaces, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 査読有, Vol. 33, No. 2, 2014, pp. 149-170,
DOI:10.4171/ZAA/1504
Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Orlicz-Hardy spaces and their duals, Science China Mathematics, 査読有, Vol. 57, No. 5, 2014, pp. 903--962,
DOI:10.1007/s11425-014-4798-y
A. Miyachi and N. Tomita, Minimal smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, Revista Matematica Iberoamericana, 査読有, Vol. 29, 2013, pp. 495-530,
<http://dx.doi.org/10.4171/RMI/728>
A. Miyachi and N. Tomita, Calderon-Vaillancourt type theorem for bilinear operators, Indiana University Mathematics Journal, 査読有, Vol. 62, 2013, pp. 1165-1201,
<http://dx.doi.org/10.1512/iumj.2013.62.5059>
L. Grafakos, A. Miyachi, N. Tomita, On multilinear Fourier multipliers of limited smoothness, Canadian Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 65, 2013, pp. 299--330,
<http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2012-025-9>
H. Tanaka and Y. Terasawa, Positive operators and maximal operators in a

filtered measure space, Journal of Functional Analysis, 査読有, Vol. 264, 2013, pp. 920--946,
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2012.12.003>
Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Yoshihiro Sawano, and Tetsu Shimomura, Littlewood-Paley theory for variable exponent Lebesgue spaces and Gagliardo-Nirenberg inequality for Riesz potentials, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 65, No. 2, 2013, pp. 633--670,
doi:10.2969/jmsj/06520633
Masaharu Kobayashi and Akihiko Miyachi, Schatten p -class property of pseudo-differential operators with symbols in modulation spaces, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, Vol. 205, 2012, pp. 119--148,
DOI: 10.1215/00277630-1543796
M. Fujita, N. Tomita, Weighted norm inequalities for multilinear Fourier multipliers, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 364, 2012, pp. 6335--6353,
<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-2012-05700-X>
Y. Sawano, S. Sugano, and H. Tanaka, Orlicz-Morrey spaces and fractional operators, Potential Anal., 査読有, Vol. 36, No.4, 2012, pp. 517--556,
DOI: 10.1007/s11118-011-9239-8
Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Bilinear estimates in dyadic BMO and the Navier-Stokes equations, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 64, 2012, pp. 399--422,
DOI:10.2969/jmsj/06420399

[学会発表](計18件)

筒井容平, Div-curl lemma with critical power weights in dimension three, 第18回さいたま数理解析セミナー, 2015年2月19日, 大宮ソニックシティ5階、埼玉大学サテライトキャンパス(さいたま市)

岡田正巳, 森田正紀, 不規則サンプリング補間と近似誤差の数理, 数学協働プログラム「ウェーブレット理論と工学への応用」2014年11月8日, 大阪教育大学天王寺キャンパス(大阪市)

菊池万里, On Doob's maximal inequality and Burkholder's square function inequality in weak spaces, 富山解析セミナー 2014, 2014年10月11日, 富山大学理学部(富山市)

出来光夫, 中井英一, 澤野嘉宏, Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue

spaces with variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月27日, 広島大学東広島キャンパス(東広島市), N. Tomita, Flag paraproducts on Hardy spaces, 2nd East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, July 13, 2014, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang, 中国

Y. Tsutsui, Boundedness of small solutions to a chemotaxis system with non-diffusive memory, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 7-11 July, 2014, Madrid, スペイン

Yasuo Furuya, Endpoint estimates for multilinear fractional integral operators, 調和解析と非線形微分方程式, 2014年6月30日, 京都大学数理解析研究所(京都市)

筒井 容平, Boundedness of global solutions to a chemotaxis system with non-diffusive chemical, 広島数理解析セミナー, 2014年6月6日, 広島大学理学部(東広島市)

筒井 容平, An application of weighted Hardy spaces to the Navier-Stokes equations, 第69回PDE実解析研究会, 2014年4月15日, 東京大学(東京都目黒区)

中井 英一, 貞末 岳, A characterization of BLO martingales, 日本数学会年会, 2014年3月17日, 学習院大学目白キャンパス(東京都豊島区)

N. Tomita, Smoothness conditions for bilinear Fourier multipliers, 1st East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications, 2013年10月24日~10月26日(10月26日発表), Seoul National University, Seoul, 韓国

Shigehiko Kuratsubo and Eiichi Nakai, The Gibbs-Wilbraham, Pinsky and the third phenomena for the multiple Fourier series, 1st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications, October 24--26, 2013 (October 26). Seoul National University, Seoul, 韓国

富田 直人, 双線形フーリエマルチプレイヤー作用素の有界性について, 日本数学会 秋季総合分科会, 特別講演(函数方程式分科会), 2013年9月24日~9月27日(9月25日発表), 愛媛大学(松山市)

Eiichi Nakai, Generalized fractional integrals on Morrey spaces with variable exponent, Asian Mathematical Conference 2013, June 30--July 4, 2013 (July 2). Busan Exhibition and Convention Center (BEXCO), Busan, 韓国

Akihiko Miyachi, Bilinear Fourier multiplier operators and bilinear pseudo-differential operators, Harmonic Analysis and its Applications (10/12--16), 2012年10月12日, Jinhua, 中国

Akihiko Miyachi, Bilinear Fourier multiplier operators and bilinear pseudo-differential operators, Honan Mathematical Society Conference (June 15--17), Jeju University, 2012年6月15日, 済州島, 韓国

Akihiko Miyachi and Naohito Tomita, Sharp conditions for multilinear Fourier multipliers, Harmonic Analysis and its Applications at Nara 2011, 2011年11月11日, 奈良学セミナーハウス(奈良市)

Akihiko Miyachi, Sharp conditions on multilinear Fourier multipliers, 8th International Conference on Function Spaces, Differential Operators, and Nonlinear Analysis, 2011年9月22日, Tabarz, ドイツ

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮地 晶彦 (MIYACHI, Akihiko)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号: 60107696

(2) 研究分担者

岡田 正己 (OKADA, Masami)

首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：00152314

古谷 康雄 (FURUYA, Yasuo)
東海大学・理学部・教授
研究者番号：70234903

菊池 万里 (KIKUCHI, Masato)
富山大学・大学院理工学研究部(理学)・
教授
研究者番号：20204836

田中 仁 (TANAKA, Hitoshi)
東京大学・大学院数理科学研究科
・特任助教
研究者番号：70422392

富田 直人 (TOMITA, Naohito)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号：10437337

澤野 嘉宏 (SAWANO, Yoshihiro)
首都大学東京・理工学研究科・准教授
研究者番号：40532635

中井 英一 (NAKAI, Eiichi)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：60259900

筒井 容平 (TSUTSUI, Yohei)
東京大学・大学院数理科学研究科
・特任助教
研究者番号：40722773
(平成26年度に研究分担者)

(3)連携研究者

佐藤 秀一 (SATO, Shuichi)
金沢大学・教育学部・准教授
研究者番号：20162430

小林 政晴 (KOBAYASHI, Masaharu)
山形大学・理学部・准教授
研究者番号：30516480

立澤 一哉 (TACHIZAWA, Kazuya)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：80227090
(平成23年度から平成25年度まで)