

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 15 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340038

研究課題名(和文) 質量・エネルギーの集中現象を伴う臨界型変分問題の大域・漸近解析

研究課題名(英文) Global and asymptotic analysis of critical variational problems with mass/energy concentration phenomena

研究代表者

高橋 太 (Takahashi, Futoshi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、質量・エネルギーの集中現象を伴う臨界型変分問題の多重爆発解の定性的・定量的性質について、(1) 多重バブル解の解空間構造と領域の幾何との関連の解明、(2) 多重バブル解のスペクトル解析的性質の研究、(3) 爆発が誘導する多重バブル解の定性的性質の研究、(4) 多重バブル解の爆発集合の特徴付けに関する未解決問題の解明、の4項目について研究を行い、国際的専門雑誌における査読付き研究論文35編の出版、計17回の日本数学会での発表などの研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)：In this research program, we study the qualitative and quantitative properties of multi-bubble solutions to the variational problems of critical type. The main 4 subjects of research are (1) Structure of spaces of multi-bubble solutions and its relation to the domain geometry (2) Study of the spectral properties of multi-bubble solutions (3) Qualitative properties of multi-bubble solutions induced by the concentration and blow-up (4) Characterization of the set of blow-up points of multi-bubble solutions. Total 35 research papers are published in the international journals and 17 research reports at the Mathematical Society of Japan are presented.

研究分野：変分法・非線形偏微分方程式論

キーワード：臨界型変分問題 爆発解析 多重バブル解 質量集中現象 コンパクト性の損失

## 1. 研究開始当初の背景

変分構造を持つ楕円型境界値問題が「臨界型」であるとは、対応するエネルギー汎関数が Palais-Smale のコンパクト性条件を大域的にはみたさない場合を指し、臨界 Sobolev 型方程式や指数非線形項を持つ 2 次元平均場方程式などがその代表例である。エネルギー汎関数が非コンパクトな群作用に関して不変性を持つとき、解の列、より一般には Palais-Smale 列は、その群作用に沿って量子化された単位量ずつのエネルギー密度や質量を流出しながらコンパクト性を喪失していく。「バブリング」と呼ばれるこの現象を深く理解しようという試みは、Sacks-Uhlenbeck による調和写像の解析的研究に始まり、1994 年の P.L. Lions によるフィールズ賞受賞に結実したといえる。以降、臨界型変分問題に付随する様々な楕円型方程式について、非コンパクトな解の列に対する漸近解析、特異極限の分類、領域内の複数個の点で集中・凝集・爆発現象を起こす「多重バブル解」の構成など、多くの研究が活発に行われてきた。爆発・凝集現象が誘導する爆発解の定性的性質について、研究代表者・高橋は科研費基盤研究(C)「臨界型変分問題の爆発解析および爆発に起因する解の定性的性質の研究」(平成 20 年~22 年)の補助を受け、最小エネルギー解などの 1 点爆発解に対して、漸近的非退化性や漸近的一意性、およびスペクトル解析的な性質についての成果を上げることができた。しかし、多重爆発解については、その解構造の解明や爆発に起因する解の定性的性質の研究は上記研究期間中に完了せず、新規に本研究を開始する動機となった。

## 2. 研究の目的

本研究課題の研究目的は以下のようである。

- (1) 多重バブル解の解空間構造と領域の幾何との相関の解明
- (2) 多重バブル解のスペクトル解析的性質の研究
- (3) 爆発が誘導する多重バブル解の定性的性質の研究
- (4) 多重バブル解の爆発集合の特徴付けに関する未解決問題の解明

## 3. 研究の方法

本研究課題の研究推進に際して、年度ごとに分けて以下の研究を行った。

平成 23 年度においては、研究組織は研究目的(1)の解明に注力した。高橋は Grossi との共同研究により、「複数点で爆発する多重爆発解は凸領域上には存在しない」という結果を得たが(JFA, 2011)、領域が凸でない場合の最も簡単な場合である 2 次元円環領域で

は、Dirichlet 境界条件付きのグリーン関数がフーリエ級数を用いて表わせること(Hickey の公式、Ann. Math. 1928)を利用して、爆発点の位置決めを行うハミルトニアンが具体的に計算できる。このハミルトニアンの臨界点の位置(=多重爆発解の爆発点の位置)について、Grossi との共同研究をまとめて、論文作成を行った。高橋達の予想は「2次元円環領域上の n 点爆発解の爆発点は、正 n 角形の頂点に並ぶ」というものであり、傍証もあるが、最終的な解決には至らなかった。

平成 24 年度において、高橋は解の爆発・凝集現象を起こす典型例として多くの研究が遂行されている 2 次元リウビル型方程式について解析を進め、「2次元リウビル型方程式の多点爆発解の爆発点の個数は、解のモース指数で上から評価される」ことを示した。この簡潔な結果は、後に 2 次元べき型非線形項方程式の解析や、より詳細な漸近解析である Gladiali-Grossi-Ohtsuka-Suzuki (Comm.PDE, 2014) などの研究を誘発した。

平成 25 年度以降には、考える方程式の非齊次化、高階化などの一般化にも着手し、研究目的欄に記した(2)(3)(4)の課題について研究を遂行した。

研究実施年度を通じて、研究方法は主に国内外の関連研究者との研究交流の活発化、及び研究分担者との密接な議論によった。研究交流拠点の形成のために、高橋は所属する大阪市立大学において、研究セミナー「南大阪応用解析セミナー」を立ち上げ、定期的に研究者を招聘し、最先端の研究動向に触れる機会を作るとともに、招聘研究者に本研究課題について率直な意見を求め、併せて研究情報の提供・アイデアの交換を図った。

また研究実施年度を通じて、海外研究者の招聘、相互訪問による研究情報交換に積極的に努め、大規模国際研究集会 10<sup>th</sup> AIMS での Special Session の組織やミラノ大学訪問などを通じて、研究情報収集、海外研究者との研究連絡を行った。

## 4. 研究成果

本研究課題推進中の 4 年間に得られた研究成果のうち、特に研究代表者に係るもののうちのいくつかを以下に述べる。

(1) 2 次元円環領域上のリウビル方程式の 2 点爆発解の爆発点の位置決めに関して、Grossi との共同研究により「爆発点は原点对称で、内径と外径の幾何平均より外側に位置する」ことを円環領域上のハミルトニアンを明示的に計算することで示した(論文)。前述したように爆発点の個数が n 点である場合の解決が今後の課題である。

(2) 非線形 Neumann 境界条件を課した 2 次元線形楕円型方程式の、境界条件に現れる非線形指数を無限大にした際の最小エネルギー解の漸近挙動について解析を行い、最小エネルギー解という特殊なクラスの解に対してではあるが、期待される結果を得ることができた(論文)。

(3) 爆発解の形状と解のモース指数の関係は興味深い研究対象である。Zhao は、2 次元ヘノン型半線形楕円型方程式の最小エネルギー解の爆発点の位置及び個数について、「爆発点は境界に近づき、また爆発点の個数は 2 個以下」であることを示した。同じ論文で最小エネルギー解の爆発点の個数は 1 であることが予想されていたが、爆発解析と解のモース指数の情報を用いた簡明な議論でこの予想を肯定的に解決することができた(論文)。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 35 件)

F. Takahashi,

Blow up points and the Morse indices of solutions to the Liouville equation: inhomogeneous case, *Advanced Studies in Pure Math.* 64, "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations" (2015), 175-182, 査読有

F. Takahashi,

A simple proof of Hardy's inequality in a limiting case, *Archiv der Math.*, 104, (2015), 77-82, 査読有  
DOI:10.1007/s00013-014-0711-8

F. Takahashi,

Extremal solutions to Liouville-Gelfand type elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions, *Commun. Contemporary Math.*, 17, (2015), no.3. 1450016 (27 pages) 査読有  
DOI:10.1142/S0219199714500163

F. Takahashi, Nonexistence of positive very weak solutions to an elliptic problem with boundary reactions, *Kodai Math. J.*, 37, (2014), 755-768, 査読有

M. Grossi, and F. Takahashi, On the location of two blow up points on an annulus for the mean field equation, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Ser. I.*, 352, (2014), 615-619, 査読有

DOI:10.1016/j.crma.2014.04.006

F. Takahashi, Asymptotic behavior of least energy solutions for a 2D nonlinear Neumann problem with large exponent, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 411, (2014), 95-106, 査読有

DOI:10.1016/j.jmaa.2013.09.044

F. Takahashi, Morse indices and the number of blow up points of blowing-up solutions for a Liouville equation with singular data, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement*, 2013, (2013), 729-736, 査読有

F. Takahashi, Some identities of Green's function for the polyharmonic operator with the Navier boundary conditions and its applications, *Mathematische Nachrichten*, 286, (2013), 306-319, 査読有  
DOI:10.1002/mana.201100236

F. Takahashi, Nonexistence of multi-bubble solutions for a higher order mean field equation on convex domains, "Geometric Properties of Parabolic and Elliptic PDE's" Springer INdAM Ser., Vol.2, Springer Milan, (2013), 283-293, 査読有  
DOI: 10.1007/978-88-407-2841-8\_18

F. Takahashi, On the number of maximum points of least energy solutions to a two-dimensional Hénon equation with large exponent, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 12, (2013), 1237-1241, 査読有  
DOI:10.3934/cpaa.2013.12.1237

Jishan Fan, H.Gao, T. Ogawa, and F. Takahashi, A regularity criterion to the biharmonic map heat flow in  $R^4$ , *Mathematische Nachrichten*, 285, (2012), 1963-1968, 査読有  
DOI:10.1002/mana.201100243

F. Takahashi, Blow up points and the Morse indices of solutions to the Liouville equation in two-dimension, *Advanced Nonlinear Studies*, 12, (2012), 115-122, 査読有

T. Sato, T. Suzuki and F. Takahashi, Vanishing p-capacity of the singular sets for p-harmonic functions, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011,

no.67, (2011), 1-15, 査読有

F. Takahashi, An eigenvalue problem related to blowing-up solutions for a semilinear elliptic equation with the critical Sobolev exponent, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S*, 4, (2011), 907-922, 査読有

F. Takahashi, and A. Uegaki, A Payne-Rayner type inequality for the Robin problem on arbitrary minimal surfaces in  $R^N$ , *Results in Mathematics*, 59, no.1-2, (2011), 107--114  
DOI:10.1007/s00025-010-0064-y

〔学会発表〕(計 17 件)

橋詰雅斗・高橋太「Neumann 境界条件型  $L^p$ -Lyapunov 不等式」  
日本数学会 2015 年春季年会函数方程式論分科会講演(明治大学・東京都千代田区)(2015 年 3 月 21 日)

M.Grossi・高橋太「2 次元円環領域上の平均場方程式の 2 点爆発点の位置について」  
日本数学会 2014 年秋季総合分科会函数方程式論分科会講演(広島大学・広島県東広島市)(2014 年 9 月 26 日)

高橋太「Extremal solutions to Liouville-Gelfand type elliptic problems with nonlinear Neumann boundary conditions」  
日本数学会 2014 年春季年会函数方程式論分科会講演(学習院大学・東京都目白区)(2014 年 3 月 17 日)

高橋太「Continuum spectrum for the linearized extremal eigenvalue problem with boundary reactions」  
日本数学会 2014 年春季年会函数方程式論分科会講演(学習院大学・東京都目白区)(2014 年 3 月 17 日)

高橋太「Asymptotic behavior of least energy solutions for a 2D nonlinear Neumann problem with large exponent」  
日本数学会 2013 年秋季総合分科会函数方程式論分科会講演(愛媛大学・愛媛県松山市)(2013 年 9 月 26 日)

高橋太「大きな指数を持つ 2 次元 Hénon 方程式の最小エネルギー解の最大点について」  
日本数学会 2012 年秋季総合分科会函数方程式論分科会講演(九州大学・福岡県福岡市)(2012 年 9 月 19 日)

高橋太「Navier 境界条件付き多重調和作

用素に対するある恒等式とその応用」  
日本数学会 2012 年春季年会函数方程式論分科会講演(東京理科大、東京都新宿区)(2012 年 3 月 27 日)

高橋太「2 次元 Liouville 方程式の爆発解の爆発点の個数と Morse 指数について」  
日本数学会 2011 年秋季総合分科会函数方程式論分科会講演(信州大、長野県松本市)(2011 年 9 月 28 日)

大塚浩史・高橋太「An asymptotic nondegeneracy result for multi-bubble solutions to the biharmonic Liouville-Gelfand problem in dimension four」  
日本数学会 2011 年秋季総合分科会函数方程式論分科会講演(信州大、長野県松本市)(2011 年 9 月 28 日)

〔その他〕  
研究代表者・高橋太の研究業績については、以下を参照のこと。

[http://rdbsv02.osaka-cu.ac.jp/profile/ja.gXzI1U12G-EhZv5aCmc0.w==.html#books\\_articles\\_etc](http://rdbsv02.osaka-cu.ac.jp/profile/ja.gXzI1U12G-EhZv5aCmc0.w==.html#books_articles_etc)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高橋太 (TAKAHASHI, Futoshi)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 10374901

### (2) 研究分担者

加藤 信 (KATO, Shin)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 00465387

西尾 昌治 (NISHIO, Masaharu)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90228156

石渡 通徳 (ISHIWATA, Michinori)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授  
研究者番号: 30350458

佐藤 洋平 (Sato, Yohei)  
埼玉大学・理工学研究科・准教授  
研究者番号: 00465387

渡辺 達也 (WATANABE, Tatsuya)  
京都産業大学・理学研究科・准教授  
研究者番号: 60549749  
(平成 25 年度より連携研究者)

(3)連携研究者

大仁田 義裕 (OHNITA, Yoshihiro)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：90183764

鈴木 貴 (SUZUKI, Takashi)  
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授  
研究者番号：40114516