

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23340039

研究課題名(和文)可積分モデルの代数解析

研究課題名(英文)Algebraic analysis of integrable models

研究代表者

神保 道夫(JIMBO, Michio)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：80109082

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,000,000円

研究成果の概要(和文)：主な成果は以下の通りである。(1)可解格子模型の研究で代表者らが導入したフェルミオン基底と、以前形状因子の数え上げに用いられたフェルミオンとの同定を行い、場の理論におけるフェルミオン基底の描像を確立した。(2)量子アフィン代数のボレル部分代数について、「圏0」に属する既約表現が最高ウェイトで分類されることを示した。(3)量子トロイダル代数の表現の族を初等的方法で構成した。またフォック表現上のR行列から定まる転送行列の対角化を行い、ベテ仮説を確立した。

研究成果の概要(英文)：The main achievements are the following.(1) We identified the continuum limit of our fermionic basis in solvable lattice models with those employed previously in the enumeration of form factors, thereby establishing the fermionic picture in field theory. (2) We studied representations in "category 0" of Borel subalgebras of quantum affine algebras, and classified the irreducible objects by highest weights. (3) We constructed a family of irreducible representations of quantum toroidal algebras by an elementary method. We also diagonalized the transfer matrix acting on the Fock space, and established the Bethe ansatz.

研究分野：数理物理学

キーワード：フェルミオン基底 6頂点模型 サイン・ゴールドンモデル 形状因子 ボレル部分代数 量子トロイダル代数 ベテ仮説

1. 研究開始当初の背景

可解モデルの相関関数は、格子模型・場の理論を通じて中心的な課題の一つである。

6頂点模型の相関関数については、研究代表者(1992,1996)ら、およびMailletらのグループ(2000--2005)により多重積分表示が知られている。Boos, Korepin, 高橋實らは多重積分が常に1重積分に帰着されることを経験的に見いだした。代表者らはこの事実を動機として(擬)局所作用素の「フェルミオン基底」を導入し、それらの期待値が簡明な表示を持つことを示した(2008)。

6頂点模型から連続極限で得られるサイン・ゴールドンモデルは可積分な場の理論の典型である。特筆すべき研究として、長距離挙動の研究に適した形状因子の理論(Smirnov, 1986)、また短距離挙動に関連して共形場理論の可積分摂動からのアプローチがある(Al.Zamolodchikov, 1991)。後者の立場からは一般の局所場の1点関数を知ることが本質的に重要である。

申請の段階で代表者らは、連続極限におけるフェルミオン基底の存在とその1点関数の一般式を予想し、それが既知の結果と整合することをほぼ確認した。

2. 研究の目的

上述のフェルミオンは、可解格子模型とそのスケール極限で得られる共形場理論・(有質量の)可積分場理論との間を橋渡しする構造と考えられる。その解明を進め、1点関数や形状因子の記述に応用することが本研究の目的である。同時に、関連する代数的構造の整備にも重点をおく。

取り組むべき課題として申請時に以下の点を掲げた。

- (1) 共形場理論におけるフェルミオン基底とVirasoro基底との遷移行列の決定
- (2) 形状因子との関係
- (3) 場の理論におけるフェルミオンの構成
- (4) 作用素積展開における構造関数
- (5) 格子におけるフェルミオンの構成
- (6) 共形場理論の指標の組み合わせ的研究

3. 研究の方法

フェルミオン基底の期待値は1変数関数() (転送行列の固有値の比)と、ある2変数関数 $\omega(\lambda, \mu)$ のみを用いて行列式で表される。これらの関数の解析を主要な手段としてスケール極限を研究する。

現時点でのフェルミオンの構成は不透明な計算に依存する部分が多い。ボレル部分代数の表現論を整備し、また共形場理論における運動の保存量の理解を深めることによって、この点の改善を目指す。

フェルミオン構造の研究はF.Smirnovおよび三輪哲二、また共形場理論の組み合わせ的研究はB.Feigin, E.Mukhinおよび三輪二との共同研究である。実際の研究遂行はメールの連絡と短期間の招聘による集中的な討論によって行った。

4. 研究成果

(1) フェルミオン構造の研究

2次元平坦時空のサイン・ゴールドンモデルでは、局所場はその形状因子(漸近状態に関する行列要素)で定まる。後者はある条件を満たす有理形関数の無限列として定式化され、一般解の積分表示が知られている。Babelon, Bernard, Smirnov(1997)は、プライマリ場から出発してすべての形状因子を系統的に作る数学的道具としてある種のフェルミオンを導入し、数え上げに有効に用いた。

サイン・ゴールドンモデルは、スペクトルパラメータを交互に変えた非斉次6頂点模型のスケール極限として得られる。研究目的の課題(2)に関連して、論文(2)においてフェルミオン基底のスケール極限を考察した。局所作用素の極限を直接取る事は困難であるが、フェルミオン基底については期待値、行列要素が明示的に与えられるので極限を調べる事ができる。その結果、フェルミオン基底の極限の形状因子がBabelonらの導入したフェルミオンで生成されたものと一致することを確認した。形状因子理論において、個々の形状因子がどの局所場に対応するかを同定し、全体のスカラー倍を定める1点関数を決定する事は懸案の問題であったが、これに対し一つの解答が得られたことになる。また、動機も構成法も全く異なる2つの対象が一致したことはフェルミオン基底の自然さ・必然性の証左であると考えている。なおBabelonらの論文はパラメータの「1の冪根」にあたる特殊値のみを扱っており、それを一般のパラメータで再構成したことも本論文の結果の一つである。

格子模型でのフェルミオンの構成法は $sl(2)$ のスピンの1/2表現の特殊性に大きく依存しており、表現や代数を変えたときどのような対応物がありうるのか不明である。研究目的の課題(5)に関連して、論文(5)ではfusionによってスピンの1の模型における生成演算子を構成した。この場合には4種のフェルミオン、および $sl(2)$ カレント代数の交換関係をもつボゾンの3つ組が現れる。

課題(1), (3), (4)については成果をあげることができなかった。特に(3)(4)に関して、 $\omega(\lambda, \mu)$ と微分方程式のスペクトル行列式との接点を探ることに少なからぬ時間を費やしたが、free fermion pointの場合以外について知見を得る事はできなかった。共形場理論におけるフェルミオンについては、反射方程式との関係でNegro-Smirnovによる進展が

あるが、遷移行列の記述には全く見通しが立っていない。

研究と平行して、現在の知見を総合報告にまとめる作業を継続中である。

(2)量子アフィン代数のボレル部分代数の表現論

周知のように、量子アフィン代数の有限次元既約表現は最高ウェイト、すなわち条件 (0) $(\lambda) = 1$ を満たす有理関数 (x) の n 個の組 (n はリー代数のランク) によって分類される。論文(6)ではボレル部分代数の表現論を考察し、「圏 O 」に属する既約表現について類似の事実を証明した。結果は通常の量子アフィン代数の場合とほぼ並行しているが、最高ウェイトの (λ) が 0 または λ となることも許容する。そのとき対応する既約表現は一般に無限次元となり、テンソル積の順序を入れ替えた表現は元の表現と必ずしも同値にならないなど通常とは異なる側面もある。

量子可積分系において重要な Q 作用素は、ボレル部分代数の表現を補助空間として定義される転送行列である。これまで $sl(2)$, $sl(3)$ などの実例が個別に議論されていたが、本論文はそれらを統一的に扱う枠組みを提出し数学的基礎づけを与えた。

(3)量子トロイダル代数の表現

量子アフィン代数はリー代数係数の1変数ローラン多項式のなすリー代数の量子化であるが、その2変数版は量子トロイダル代数とよばれる。研究目的の課題(6)に関連し、論文(7)-(12)ではA型量子トロイダル代数の表現を考察した。

論文(7),(8)は組み合わせ的なアプローチにより、ベクトル表現およびフォック表現のテンソル積の可約性を調べた。応用として、論文(9),(10)ではDrinfeldの余積と半無限ウェッジ積を用いて新しい準有限表現を系統的に構成した。たとえばもっとも基本的なマクマホン加群は平面分割でラベルされる基底を持ち、生成元の作用が因数分解した明示公式で与えられる。

論文(11)では $gl(n) \times gl(m)$ の $gl(m+n)$ への埋め込みの類似を量子トロイダル代数について構成し、フォック表現とそのテンソル積の場合に分岐則を与えた。

論文(12)では、 $gl(1)$ 型の場合に普遍R行列から定まる転送行列のフォック表現上での対角化を論じた。その第1ハミルトニアンはマクドナルド作用素の楕円類似としてFeigin, Shiraishiらが研究したものと一致している。従来の代数的ベータ仮説法は適用が困難であるため、フォック表現をある対称有理関数の空間(シャッフル代数)で実現することにより、第1ハミルトニアンの固有値がベータ根の対称式で与えられることを示した。これはベータ仮説法における新しい手法と思わ

れる。

量子トロイダル代数が90年代に導入されて以来表現論の研究は多くなかったが、最近ではAGT予想との関係などから注目されている。特に $gl(1)$ 型量子トロイダル代数はヴィラソロ代数、A型W代数の q 変形にあたる構造で共形場理論に関係が深い。現在主流となっているのは幾何学的表現論であるが、本研究のアプローチは極めて初等的である点が特色である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

(1) B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Quantum toroidal gl_1 and Bethe Ansatz, J. Phys.A, 査読有, Vol. 48, 2015, 244001.

(8) M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Creation operators for the Fateev-Zamolodchikov spin chain, 査読有, Theoret. Math. Phys. Vol. 181, 2014, 1168--1192
DOI: 10.1007/s11232-014-0207-5

(2) B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Branching rules for quantum toroidal gl_N , arXiv:1309.2147v1, 2013, to appear in Adv. Math. 査読有

(3) B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Representations of quantum toroidal gl_n , J. Algebra, 査読有, Vol. 380, 2013, 78—108
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.12.029

(9) M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Fermions acting on quasi-local operators in the XXZ model, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Eds. K. Iohara, S. Morier-Genoud and B. Remy, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, Vol. 40, 2013, 243--261

(4) B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Quantum toroidal gl_1 algebra : plane partitions, Kyoto J. Math, 査読有, Vol. 52, 2012, 621--659
DOI: 10.1215/21562261-1625217

(7) D. Hernandez and M. Jimbo, Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions, *Compositio Mathematica*, 査読有, Vol. 148 2012, 1593 – 1623
DOI: 10.1112/S0010437X12000267

(10) M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Fermionic screening operators in the sine-Gordon model, *Physica D*, 査読有, Vol. 241, 2012, 2122-2130
DOI: 10.1016/j.physd.2012.05.012

(5) B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Quantum continuous gl infinity: Tensor products of Fock modules and Wn characters, *Kyoto Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 51, 2011, 365—392
DOI: 10.1215/21562261-1214384

(6) B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa and E. Mukhin, Quantum continuous gl infinity: Semi-infinite construction of representations, *Kyoto Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 51, 2011, 337—364
DOI: 10.1215/21562261-1214375

(11) M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Fermionic structure in the sine-Gordon model: Form factors and null vectors, *Nuclear Physics*, 査読有, Vol. B852, 2011, 390—440
DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2011.06.016

(12) M. Jimbo, T. Miwa and F. Smirnov, Hidden Grassmann structure in the XXZ model V: sine-Gordon model, *Letters in Mathematical Physics*, 査読有, Vol. 96, 2011, 325—365
DOI: 10.1007/s11005-010-0438-9

〔学会発表〕(計 15 件)

(1) Michio Jimbo, Fermionic basis of local fields in integrable models, “Moshe Flato Lecture Series”, 2015年3月12日, Beer Sheva (Israel)

(2) Michio Jimbo, Branching rules for the quantum toroidal gl_n algebra, “Infinite Analysis 14”, 2014年3月7日, 東京大学総合文化研究科 (東京都目黒区)

(3) Michio Jimbo, Fermionic basis in integrable models: profile and prospect, *Mathematical Statistical Physics*, 2013年8

月1日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府京都市)

(4) 神保道夫, Representations of quantum toroidal algebras: an elementary approach, 第13回代数群と量子群の表現論, 2013年6月3日-4日, 箱根 (神奈川県足柄下郡)

(5) Michio Jimbo, Correlation functions in integrable models II. The role of quantum affine symmetry, American Physical Society March Meeting 2013, 2013年3月19日, Baltimore (USA)

(6) Michio Jimbo, Representations of quantum toroidal algebras, “Recent Advances in Quantum Integrable Systems”, 2012年9月11日, Angers (France)

(7) Michio Jimbo, Fermionic basis of local operators in quantum integrable models, International Congress of Mathematical Physics, 2012年8月6日, Aalborg (Denmark)

(8) Michio Jimbo, Fermions acting on local operators in the XXZ model: a review, “Symmetries, Integrable Systems and Representations”, 2011年12月15日, Lyon (France)

(9) 神保道夫, 量子サイン・ゴールドンモデルに関する最近の話題, 神戸大学理学部談話会, 2011年10月19日, 神戸大学(兵庫県神戸市)

(10) Michio Jimbo, Fermionic basis of local operators in the sine-Gordon model, “8th Bologna Workshop in Conformal Field Theory and Integrable Models”, 2011年9月13日, Bologna (Italy)

(11) Michio Jimbo, Fermionic structure in the sine-Gordon model II, “Correlation functions of quantum integrable models”, 2011年9月8日, Dijon (France)

(12) Michio Jimbo, Fermionic basis of local fields in the sine-Gordon model, Integrability in Gauge/String Theories Conference (IGST2011), 2011年8月16日, Perimeter Institute, Waterloo (Canada)

(13) Michio Jimbo, Fermionic structure in integrable models: from lattice to CFT and massive field theory:II, “Infinite Analysis 11--- Frontiers of Integrability---”, 2011年7月27日, 東京大学数理科学研究科 (東京都目黒区)

(14) 神保道夫, 量子アフィン・ボレル代数の表現について、「可積分系とその周辺」, 2011年7月2日、大阪大学大学院理学研究科（大阪府豊中市）

(15) Michio Jimbo, Fermionic structure in the sine-Gordon model---Recent developments--, "Quantum Integrability and Gauge Theories", Hamilton Mathematical Institute, 2011年4月1日, Dublin (Ireland)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

神保 道夫 (JIMBO, Michio)
立教大学・理学部・教授
研究者番号：80109082