

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23500007

研究課題名(和文) ネットワークの耐故障性を考慮したグラフ構造の解析とアルゴリズムの設計

研究課題名(英文) Design of algorithms for problems of fault-tolerance of networks

研究代表者

荒木 徹 (Araki, Toru)

群馬大学・理工学研究院・准教授

研究者番号：40361042

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、グラフ理論、グラフアルゴリズムについての理論的な研究である。ネットワークにおける資源配置問題の中から、支配集合問題と完全独立全域木問題を取り上げ、それらの問題を解決するためのアルゴリズムの設計、または数学的な解析を行った。

支配集合問題では、特に双方向支配問題についてのアルゴリズムを設計した。具体的には、ラウンドダイグラフと呼ばれるグラフと、局所トーナメントと呼ばれるグラフに対して、効率的なアルゴリズムを設計した。

完全独立全域木とは、ネットワークの通信路に故障が発生しても、通信が行えるようにする方法の一つである。これに対して、全域木が存在するための数学的な新しい十分条件を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this study, we considered problems of domination in graphs, and the problem of completely independent spanning trees in graphs. It is known that these problems have been related to the problems of fault-tolerance in networks.

First we considered the problems of domination in graphs, and we obtained some polynomial-time algorithms for problems of twin domination in round digraphs and local-tournaments which are well known classes of digraphs.

Second, we considered the problem of completely independent spanning trees. This problem is a model of fault-tolerant routing in networks. We obtain some new sufficient condition of the existence of completely independent spanning trees in graphs.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム 情報基礎 グラフ理論 ネットワーク 耐故障性

1. 研究開始当初の背景

ネットワーク上の問題を、グラフ理論を使って数学的にモデル化し、その上でグラフ上の問題を解くためのアルゴリズムを設計するという手法が、数多く行われている。その中で、特に有用なグラフ上の問題として研究されているものに、支配集合問題と全域木に関する研究がある。

どちらの問題も、最適解を求めるには一般に計算量が大きくなる NP 完全問題になることが知られている問題である。

ネットワークに関する問題に「故障に強いネットワーク」について考える研究が数多くある。上記の支配集合問題も、ネットワークの故障に対応した形で拡張された問題も多い。また完全独立全域木とは、そもそもノードの故障が発生したネットワークにおいて、通信経路を容易に確保するためのアイデアの一つである。

2. 研究の目的

ネットワークを数学的にモデル化するものとしてグラフが広く使われている。例えば、インターネット上のウェブページを頂点、リンクを辺とするグラフはウェブグラフと呼ばれている。コンピュータネットワークだけでなく、道路網もネットワークであるし、電力や水道を供給するためのインフラもネットワークである。それらも同様にグラフによってモデル化できる。

ネットワークは常に同じ形をしているわけではなく、頂点や辺が新たに追加されたり、なくなったりする。例えば、新しい道路が設置されたり、トラブルで送電線が使えなくなったりする。

本研究では、ネットワーク上で発生する故障を考慮した耐故障性についての問題を、グラフ理論によって解析し、効率的に解決するためのアルゴリズムを設計することが目的である。具体的には、以下の問題を考える。

【支配集合問題】

グラフにおいて、頂点の部分集合 S が、 S に含まれないどの頂点も S の頂点と隣接するとき、 S を支配集合という。

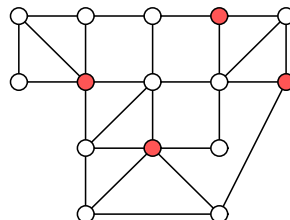


図 1: 支配集合の例

図 1 の赤い 4 頂点の集合が支配集合である。実際、どの白い頂点も、いずれかの赤い頂点と隣接している。

これはネットワーク上に「どの頂点にいて

も隣の頂点からサービスを受けられるようにするには、どこにサービス施設を配置したらよいか」という問題をモデル化している。図 1 では、4 頂点を選ぶことで最も少ない頂点数でこの要求を満足できる。

本研究では多重支配問題やそれに関連する問題について考察する。これはどの頂点も複数の頂点と隣接するように支配集合を求める問題であり、故障に対するバックアップを用意することと対応する。

【素な経路を生成する全域木】

グラフ上の 2 点間を結ぶ経路を生成する問題は、ネットワークの重要な問題の一つである。特に、通信経路の一部がトラブルで停止しても、それを回避する経路を準備しておくことは実用上重要な問題である。障害時に故障箇所を回避する経路をその都度計算してもよいが、ここでは、その経路をあらかじめネットワークの全域木として用意しておくことを考える。これは独立全域木という問題を一般化したものであり、完全独立全域木と呼ばれている。

与えられたグラフが完全独立全域木を持つかどうかを計算機で判定する問題は、NP 完全であることがすでに証明されている。そこで、本研究では対象とするグラフを限定することで、その判定を高速に行うアルゴリズムを設計することを目的とする。また、グラフ理論の観点からも興味深い問題であるので、グラフが完全独立全域木を持つための十分条件を発見することも目的とする。

3. 研究の方法

(1) グラフの多重支配集合またはそれに類する支配集合を求める多項式時間アルゴリズムを設計する。一般のグラフに対しては NP 完全性が証明されている問題であるため、対象とするグラフを限定して、効率的なアルゴリズムを求める。

パーフェクトグラフと呼ばれているグラフクラスでは、通常の支配集合問題が多項式時間で解けることが知られているものが多い。それらのグラフで多重支配問題を解くアルゴリズムを考える。例えば、区間グラフ、置換グラフなどである。

有向グラフにおける支配集合問題を考える。すでに de Bruijn ダイグラフ、Kautz ダイグラフというグラフに対して、最適な多重支配集合を求める方法をいくつか示している。同じように、いくつかの有向グラフのクラスについて、支配集合問題を考える。例えば局所トーナメントやその一般化などである。

特に有向グラフで重要なグラフとして、DAG (Directed Acyclic Digraph) がある。それらのグラフについての支配集合問題を考える。

(2) 素な経路を生成する全域木

この問題も一般に NP 完全性が証明されている。こちらを対象のある特定の構造を持つグラフに限定し、アルゴリズムを設計する。また、この問題は連結度や支配数といったグラフのパラメータと関連が深いと予想されるため、どのようなパラメータを持つグラフが完全独立全域木を持つのかを数学的に考察し、明らかにする。

4. 研究成果

(1) 支配集合問題について

区間グラフ、置換グラフでの多重支配問題について考察していたが、残念ながら 2011 年、2013 年にこれらのグラフに対する成果が海外の研究者によって発表されてしまったため、成果として発表することがかなわなかった。

ラウンドダイグラフと呼ばれているグラフについて、その双方向支配集合を多項式時間で求めるアルゴリズムを設計した。より詳しくいうと、双方向支配、全双方向支配、独立双方向支配という 3 つの異なる問題について、それぞれアルゴリズムを設計することができた。独立支配集合問題は、ラウンドダイグラフを含む局所トーナメントというより広いグラフクラスに関する結果である。

局所トーナメントに対する支配集合問題の計算量は現在までにはっきりと求められていない難問である。そこで局所トーナメントであり、かつ DAG であるグラフについて、支配集合を求めるアルゴリズムを設計した。現在のところ未発表であるが、ちかいうちに投稿する予定である。

(2) 素な経路を生成する全域木

与えられたグラフが、2 つの完全独立全域木を持つための十分条件を求めることができた。具体的には、以下の定理を証明した。

- すべての頂点の次数が $n/2$ 以上であるなら、そのグラフは 2 個の完全独立全域木を持つ。ここで n はグラフの頂点数である。
- 2 連結グラフの 2 乗は、2 個の完全独立全域木を持つ。

これらの条件は、グラフがハミルトニアン閉路を持つための十分条件として知られており、グラフ理論において非常に有名な結果の一つである。今回はそれら、完全独立全域木の存在を保証することの条件にもなっていることを示した。この結果の意味は、非常に分かりやすいシンプルな条件を示したことであり、さらに非常に有名な条件であるため、様々な研究者による今後の発展が見込まれることである。

また、部分 k 木、 k 木、区間グラフ、Circular-arc グラフといったグラフにおいて、完全独立全域木を構成するアルゴリズムを設計した。部分 k 木に関する結果は論文に

まとめ投稿したが、現在のところ査読が完了しておらず未発表である。主な成果を以下に挙げる。

- k 木において構成可能な完全独立全域木の最大数の上界と下界を示した。またその範囲にある任意の個数の全域木を持つ k 木が構成可能であることを示した。
- 部分 k 木において、与えられた数である t 個の完全独立全域木が存在するかどうかが多項式時間で判定可能であることを証明した。
- 区間グラフが k 連結ならば、 $(k+1)/2$ 個の完全独立全域木が構成可能であり、そのためのアルゴリズムを示した。特に proper interval グラフでは、 $(k-1)$ 個の全域木が構成可能であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Tamaki Nakajima, Yuki Tanaka, Toru Araki, Twin domination problems in round digraphs, IEICE Transactions on Fundamentals, 査読有, vol. E97-A, no. 6, Jun, 2014.

Toru Araki, Dirac's condition for completely independent spanning trees, Journal of Graph Theory, 査読有, 掲載決定.

doi:10.1002/jgt.21780.

[学会発表](計 3 件)

荒木 徹, 局所完全ダイグラフの独立双方向支配集合について, 情報処理学会アルゴリズム研究会, 2012 年 11 月 2 日, 岩手大学.

原田 高浩, 荒木 徹, 区間グラフの向き付けにおける双方向支配, 第 11 回情報科学技術フォーラム

(FIT2012), 2012 年 9 月 5 日, 法政大学.

中島 環, 荒木 徹, ラウンドダイ
グラフの双方向支配集合, LA シンポ
ジウム, 2011 年 7 月 20 日 .

〔その他〕
ホームページ等

<http://www.mais.cs.gunma-u.ac.jp/arakit/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

荒木 徹 (ARAKI TOORU)
群馬大学・理工学研究院・准教授
研究者番号 : 40361042