

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 27 日現在

機関番号：53701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2014

課題番号：23500029

研究課題名(和文) 証明検証システム実現へ向けた推論ライブラリの作成

研究課題名(英文) Construction of reasoning library for realization of computer verification system

研究代表者

遠藤 登 (Endou, Noboru)

岐阜工業高等専門学校・その他部局等・准教授

研究者番号：30342497

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では計算機検証システムMizarに対する推論データベースの拡充について研究を行った。数学における各種の理論を形式化することで、将来的には自動証明、自動推論の実現を目的とし、人工知能の実現へ向けた一つのアプローチである。本研究の成果は主に測度論、微分積分学、関数解析学の3つの分野にまたがる。測度論では具体的な測度の構成について形式化を行った。微分積分学については高階偏微分、微分方程式の形式化を行った。関数解析学では可積分関数の空間、共役空間の形式化を行った。これらの研究成果について関連学会に13本の論文を発表した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is expansion of the reasoning database for computer verification system Mizar. By formalizing various theories in mathematics, the automatic proof or the automatic reasoning will be realized in the future. This study is one of approaches for a realization of an artificial intelligence. The results of this research are mainly three areas which are measure theory, calculus and functional analysis. In the measure theory, we formalized a construction of the measure for a given set. In calculus, a definition of higher-order partial differential and some elementary theorems of an ordinary differential equation were formalized. In functional analysis, the L1 space and the conjugate space were formalized. We published 13 papers in the relevant Society.

研究分野：情報数理工学

キーワード：形式化数学 形式検証

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 現在の数学、物理学及び工学の発展は多くの研究者の偉大な業績を基に構築されてきた。そしてこれらの理論の正当性の検証は、従来蓄積されてきた定理群のもと、人間が個々に検証することで発展してきた。しかし近年の数理科学、工学技術の急速な発展によって、より複雑な理論やシステム展開がなされており、これらの正当性を一つ一つ検証することが難しくなりつつあるのが現状である。そこでこのような複雑な理論の検証、あるいはシステム等の解析を、コンピュータにより正確かつ迅速に行うシステム(計算機検証システム)の構築が今後必要になる。

(2) Mizar システムは証明の正当性を検証するプルーフチェッカー、検証済みの定理群を集めたライブラリからなる計算機検証システムである。Mizar システムは数ある計算機検証システムの中でも最大級のシステムの一つとして知られている。しかしながら、将来的に自動証明、自動検証を実現するにあたってはライブラリの充実が不可欠である。

## 2. 研究の目的

(1) Mizar システムをはじめとする多くの計算機検証システムでは、集合論や抽象代数に関する定理がライブラリの大半を占めている。理由としては集合論や抽象代数は数理論理学と密接につながっており、相互に関係性を持ち発展してきた。このため計算機検証システムで利用

## 3. 研究の方法

Mizar システムを用い、測度論、微分積分学、関数解析学等、現代数学の基本分野に関する各種定義、定理の証明を行い Mizar システムの推論データベースの拡充を行う。さらに得られた成果を国内外の関連学会へ随時報告を行う。

## 4. 研究成果

本研究では主として(1)測度論、(2)微分積分学、(3)関数解析学に関する形式化を行った。各々の形式化について以下に報告する。

### (1)測度論について

測度論に関する研究当初のライブラリ状況としては、測度の性質により形式的な定義がなされており、1次元ルベグ測度を除き具体的な測度が定義できていない状況であった。このため本研究では一般的な測度の構成法を基に、集合半代数上での前測度の構成、前測度の Jordan 測度への拡張、Jordan 測度の 加法的測度への拡張、の手順により測度を構成することを試みた。この中で Jordan 測度の 加法的測度への拡張については研究代表者の過去の研究により、既にライブラリ化がなされており、研究の中心は集合代数上の前測度の構成と 前測度の Jordan 測度への拡張である。結果としては上記については残念ながら研究終了時におい

て、論文投稿はしているものの発表までには至っていない。しかしながら研究過程において“集合環と集合代数”、“2重級数”に関し発表を行った(下記発表論文、)。特に2重級数については、Pringsheim 型級数、累次級数の収束概念を導入し精密な形式化を行った。また未発表(投稿中)ながら2重級数に関する Fatou の補助定理についても形式化が終了している。今後この分野のさらなる展開としては、古典的な発散級数や Cesaro 加法性のみならず現在盛んに研究されている2重級数のなす可積分空間への進展の基礎となることが期待できる。

### (2)微分積分学について

微分積分学に関する研究当初のライブラリ状況としては、ユークリッド空間上の実数値及び複素数値関数の微分(偏微分を含む)およびリーマン式積分、ルベグ式積分の基本定理が中心であった。これに対し関数解析学等ではより一般的なノルム空間上の微分や高階偏微分を扱うため、本研究ではこれらの応用へ向けた基礎定理群のライブラリ化を行った。具体的には高階偏微分の形式化(下記発表論文)、ノルム空間上で定義された関数の微分可能性(下記発表論文)、微分方程式の形式化(下記発表論文)である。高階偏微分は数学の基礎となる分野であるため様々な発展が期待でき、ノルム空間上の微分については関数解析学における関数空間上の微分として応用が可能である。さらに微分方程式は現象の記述をはじめ、方程式の安定性、可解性など様々な応用が期待される。

### (3)関数解析学について

関数解析学では主に2つの流れがある。一方は各種関数の集合としての関数空間の概念と、もう一方の関数空間上での演算としての解析学である。双方とも重要であるが、これまでの Mizar システムでは主に前者に重きを置いてライブラリの拡充がなされてきた。本研究でも同様に重要関数空間である可積分関数の作る  $L^1$  空間を構成した。その際ルベグ式積分に関する基礎理論は研究代表者らによる既存のライブラリを活用した(下記発表論文)。さらに関数空間上での演算としてバナッハ空間値関数の積分、共役空間、弱位相などについての形式化を行った(下記発表論文、)。さらに未発表(論文投稿中)ながら、関数解析学で重要な定理の一つであるリースの表現定理についても、限定した形であるが形式化を行っている。なお、関数解析学の形式化については数ある検証システムにおいて Mizar システムが最も進展しており、研究代表者らの研究が重要な位置を占めている。さらに今後のこの分野の展望としては、ソボレフ空間の形式化をはじめとする応用上重要となる関数空間の形式化、フーリエ解析、ベクトル解析など重要な解析学のテーマへの発展が期待される。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Nakasho, Kazuhisa and Endou, Noboru, Separability of Real Normed Spaces and Its Basic Properties, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.23, No.1, 59-65  
DOI:10.2478/forma-2015-0005

Noboru Endou, Kazuhisa Nakasho and Yasunari Shidama,  $\pi$ -ring and  $\pi$ -algebra of Sets, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.23, No.1, 51-57  
DOI:10.2478/forma-2015-0004

Keiko Narita, Noboru Endou and Yasunari Shidama, Bidual Spaces and Reflexivity of Real Normed Space, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.22, No.4, 303-311  
DOI:10.2478/forma-2014-0030

Keiko Narita, Noboru Endou and Yasunari Shidama, Dual Spaces and Hahn-Banach's Theorem, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.22, No.1, 2014, 69-77  
DOI:10.2478/forma-2014-0007

Noboru Endo, Double Series and Sums, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.22, No.1, 2014, 57-68  
DOI:10.2478/forma-2014-0006

Narita, Keiko and Endou, Noboru and Shidama, Yasunari, Differential Equations on Functions from  $\mathbb{R}$  into Real Banach Space, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.4, 2013, 261-272  
DOI:10.2478/forma-2013-0028

Futa, Yuichi and Endou, Noboru and Shidama, Yasunari, Isometric Differentiable Functions on Real Normed Spaces, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.4, 2013, 249-260  
DOI:10.2478/forma-2013-0027

Keiko Narita, Noboru Endou and Yasunari Shidama, The Linearity of Riemann Integral on Functions from  $\mathbb{R}$  to Real Banach Space, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.3, 2013, 185-191  
DOI:10.2478/forma-2013-0020

Noboru Endou, Hiroyuki Okazaki and Yasunari Shidama, Double Sequence and Limits, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.3, 2013, 163-170  
DOI:10.2478/forma-2013-0018

Keiko Narita, Noboru Endou and Yasunari Shidama, Riemann Integral of Functions from  $\mathbb{R}$  into Real Banach Space, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.2, 2013, 145-152  
DOI:10.2478/forma-2013-0016

Noboru Endou and Yasunari Shidama, Differentiation in Normed Spaces, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.21, No.2, 2013, 95-102  
DOI:10.2478/forma-2013-0011

Yasushige Watase, Noboru Endou and Yasunari Shidama, On  $L_1$  Space Formed by Complex-Valued Partial Functions, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.20, No.4, 2012, 349-357  
DOI:10.2478/v10037-012-0039-4

Noboru Endou, Hiroyuki Okazaki and Yasunari Shidama, Higher-Order Partial Differentiation, Formalized Mathematics, 査読有, Vol.20, No.2, 2012, 113-124  
DOI:10.2478/v10037-012-0015-z

[学会発表](計 0 件)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等:特になし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

遠藤 登 (ENDO, Noboru)

岐阜工業高等専門学校・電子制御工学科・  
准教授

研究者番号：30342497

(2)研究分担者  
( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：