様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５１０１６０

研究課題名（和文）客の待ち時間に制限がある待ち行列システムの基礎研究

研究課題名（英文）A fundamental research on queueing systems with bounded waiting time

研究代表者
河西　憲一（KAWANISHI, Ken'ichi）

群馬大学・理工学研究院・准教授

研究者番号：５０３３４１３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円、（間接経費）　750,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では客の待ち時間に制限がある待ち行列システムについて研究した。相関のある到着過程、あるいはサービス過程に相関構造がある場合において、客の制限時間が一般分布に従う場合における待ち行列長についての定常方程式を解析した。定常方程式を厳密にあるいは近似的に解くために、客の制限時間の確率分布、客の到着過程、サービス過程の条件を様々に仮定し、性能評価指標を算出するアルゴリズムを構築した。構築したアルゴリズムの応用例として、コールセンターを想定した客の待ち時間に制限時間のある待ち行列モデルを解析し、待ち時間分布や呼損率などの性能評価指標を数値的に計算した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we study queueing systems in which waiting times of customers in queue are bounded. Assuming that the arrival process of customers has correlation among the inter-arrival times, or service times of customers are correlated, or both, we analyze steady state equations of queue length distribution when the bounded waiting times of customers are independent and identically distributed. In order to solve the steady state equations of queue length distribution rigorously or approximately, we relax the correlation structures of arrival and service processes, and specify the distribution of the bounded waiting times. Then we obtain algorithms for computing performance measures of the queueing systems. As an application of the algorithms, we analyze a call center queueing model and numerically compute its performance measures such as actual waiting time distribution and blocking probability.

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学　社会システム工学・安全システム

キーワード：待ち行列理論　応用確率論　性能評価　モデル化　システム工学

１．研究開始当初の背景

(1) 待ち行列理論の誕生をアーランによって発表された論文「自動電話交換機におけるいくつかの重要な確率論の問題の解」が刊行された 1917 年とすると、その後今日までおよそ 100 年近くが経過していることになる。アーランが考察した問題は電話回線の供給量を、客の需要量に応じて適正に決めることを動機とする。アーランは、客（電話の接続要求）と扱い者（電話回線）から構成される待ち行列システムにおいて、客の到着過程がポアソン過程であり、扱い者が提供するサービス時間が指数分布に従うことを前提として解析した。アーランの解析結果により、待ち行列長や待ち時間の確率分布の定量化が可能となった。

(2) アーランが扱った待ち行列システムは、数理的な解析が可能であり、かつ現実的に受け入れられる範囲で、その後様々な方向に拡張された。客の到着過程を拡張する方向や、サービス時間をより一般的な確率分布とする方向はもとより、客の挙動までも考慮された待ち行列システムが数理的に解析されてきた。そのような客の挙動として、例えば、待ち行列に並び始めたが途中で退去する現象が挙げられる。このような客の挙動を考慮した待ち行列システムは、コールセンターやインターネットにおいて見受けられる待ち行列システムでもある。実際、コールセンターに電話をかけた顧客が待たされる場合、サービスを受けることを断念して途中退去することがある。また、インターネットを介して映像を配信する場合、制限時間内に映像データを相手先に配信できなければそのデータは映像として再生されず廃棄される。両者はまさに、客が待ち行列システムに並び始めたものの、待ち時間に制限があるため、客がサービスを受けずに途中で退去することがある待ち行列システムとして捉えることができる。

(3) 以上のように、客の待ち時間に制限がある待ち行列システムは、今日において重要な応用例をもつこともあり、待ち行列理論の基礎研究としては意義深い研究対象である。客の待ち時間に制限のある待ち行列システムについての研究では、これまでに国内外で主に次のような前提のもとで検討されてきた。すなわち、前提１：客の制限待ち時間は一定、ないし指数分布に従う、前提２：客の到着はポアソン過程、サービス時間は指数分布に従う、という前提である。前提１は待ち行列システムを数理的に解析可能とするために前提とされている側面が強い。また前提１は現実のデータ（例えばコールセンターの統計データ）とは整合しないことも報告されており、よってこの点を克服すべくさらに研究を進める余地はある。前提２も数理的に扱い易くする側面からは非常に有効ではあるが、客の到着過程はポアソン過程のように到着間隔が互いに独立でかつ指数分布に従うとは許容できない場合がある。例えば、インターネット上を流れる映像データを細分化したパケットの到着過程としては現実的には不適と言わざるを得ない。なぜならば、映像データはパケットに分割されてバースト的に発生するなどの相関があるからである。コールセンターに到着する客についても、再呼と呼ばれる客の挙動を考慮すると、ポアソン過程によるモデル化では十分表現できない。さらに指数分布は必ずしもサービス時間を表現する確率分布としては適当ではないことも知られている。

２．研究の目的

(1) 本研究では客の待ち時間に制限がある待ち行列システムについて、解析的なアプローチにより研究する。客の到着過程がポアソン過程ではなく相関のある到着過程、サービス時間分布が指数分布ではなく相関のあるサービス過程で記述される場合、さらに両者を同時に考慮する場合を検討する。さらに制限待ち時間が一般分布に従う場合に焦点を当て、待ち行列長の定常分布の導出と性評価指標を算出するための計算アルゴリズム構築を目的とする。

(2) 相関のある到着過程として、マルコフ型到着過程を検討する。マルコフ型到着過程は音声をパケット通信で伝送する場合によく用いられるマルコフ変調ポアソン過程を含むような到着過程のモデルであり、各々の到着間隔に相関構造をもたせることができる。本研究においては、マルコフ型到着過程はコールセンターにおける再呼を考慮した電話接続要求の発生間隔のモデルとして用いる。サービス過程に相関のあるモデルとしてマルコフサービス過程を検討する。マルコフサービス過程とは実質的にマルコフ型到着過程での到着間隔をサービスの完了間隔に適用した場合と考えられる。本研究においては、コールセンターにおける後処理業務を伴う場合のサービス過程をモデル化するために用いる。

３．研究の方法

(1) 待ち行列に並んだ客が途中退去するまでの残り時間（残余時間）を補助変数として導入し、待ち行列長の定常分布をマルコフ過程で定式化する。さらに本研究では補助変数として途中退去する時間の経過時間を補助変数としても定式化する。残余時間と経過時間のどちらを選ぶかは本質的ではなく、共にマルコフ過程として定式化は可能である。しかしながら、定常待ち行列長を解析するならば経過時間を選べ

ば十分であり、見通しの良い定式化が可能である。定式化によって得られた定常方程式を解析的に解くために、制限時間について仮定を設け、待ち行列長についての定常分布を評価する。さらに、性能評価指標を算出するアルゴリズムを構築する。

(2) 客の待ち時間に制限がある待ち行列モデルの中でも比較的扱い易い待ち行列モデルの場合、すなわち、到着過程がポアソン過程でありサービス時間が指数分布であるとき、性能評価指標を計算するためには、仮に到着する客が待つ確率（仮待ち時間が正である確率）を求める必要がある。この待つ確率は、制限時間が一般分布の場合、２重積分に表現される量（通常、記号 $J$で表される）に比例することが知られている。本研究ではこの２重積分を直接的に評価せず、ラプラスの方法（鞍点法）を用いて２重積分の計算を回避し、より簡便な近似評価手法を検討する。

４．研究成果

(1) 客の到着過程がポアソン過程ではなく相関のある到着過程、あるいはサービス時間分布が指数分布ではなく相関のあるサービス過程であることを前提に、補助変数として制限時間についての経過時間を導入し、待ち客数と補助変数を組み合わせてマルコフ過程を構成した。導出したマルコフ過程が満たすべき定常方程式の球解は、客の制限時間を一般分布とする限り困難である。仮に到着過程については相関構造のないポアソン過程に限定し、サービス時間は相関構造のあるサービス過程を表すとしても、サービスの完了時間について、指数分布の無記憶性が使えないため補助変数法では解の構成が困難である。

制限時間が一般分布ではなく、一般分布を十分近似可能な相型分布とするならば、マルコフ過程を構成でき、かつその解析も少なくとも数値的なアルゴリズムを構築するという意味においては可能である。しかしながら、制限時間を相型分布とする場合、相の数が 1 を越えると、待ち客数が増えるにつれてマルコフ過程を構成する状態空間が急激に増大する。その結果、相の数が多い場合は事実上数値計算が困難である。そこで、相型分布における相の数が１つに選べる指数分布を制限時間とした場合について解析した。

(2) 客の待ち時間に制限時間のある待ち行列システムの応用例として、コールセンターを想定し、数値的に性能評価指標を算出した。制限時間が指数分布で、相関のある到着過程とサービス過程を前提とした。到着過程に相関構造がある場合を扱うため、コールセンターにおいて客が再呼する場合を想定し、再呼を含めた呼の到着過程をマルコフ型到着過程として記述した。さらに、コールセンターにおける後処理業務を取り込み、サービス過程に相関構造を持たせた。

図１は客の待ち時間（サービスを受けるまでの待ち時間と、サービスを受けずに途中で退去するまでの待ち時間の両方を含む）の確率分布を示す。図１において、横軸は待ち時間を、縦軸は待ち時間がある時間を超える確率を表す。客の再呼間隔の期待値を１とし、客の制限時間の期待値はその 40 倍とした。その他の諸元はコールセンターの実データを参考に設定した。性能評価指標を算出するアルゴリズムは行列解析法に基づく。行列を扱うアルゴリズムの場合、扱う行列のサイズが大きくなると、計算精度が劣化する。行列のサイズは待ち行列システムの大きさに依存して増大する。この例ではサーバ数が多くても 40 弱程度であるが、構築したアルゴリズムを用いると、さらに大きなサーバ数でも数値的に高い精度を維持した計算が可能である。

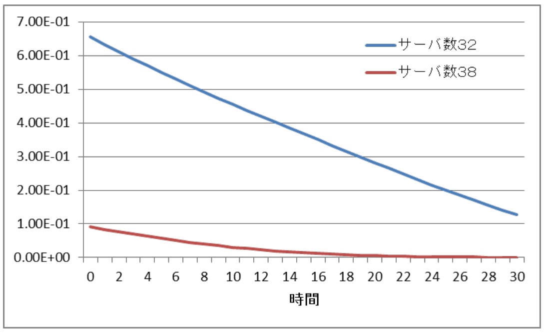


図１：待ち時間の確率分布

図２に客がシステムから棄却される確率（呼損率、コールセンターの例で言えば電話がつながらない確率）を示す。制限時間内にサービスが開始されなかった客が再呼を繰り返す場合を「再呼する場合」、再呼をしないでシステムから退去する場合を「退去する場合」とする。この例も含めて、本研究の成果により、コールセンターにおける客の挙動が、待ち行列システムの性能評価指標に及ぼす影響を明らかにすることが可能となる。

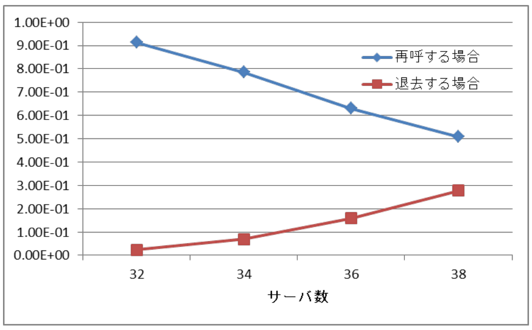


図２：システムから棄却される確率

(3) 客の制限時間を、相型分布における相の数が１つに選べる指数分布ではなく、相の数を増やした場合についても検討した。相の数

を１より多くすると、マルコフ過程の状態空間が待ち客数に対して急激に増大する。例えば、待ち客ごとに相を補助変数として状態空間を構成する方法（方法１)の場合、待ち客数に対して指数関数的に状態の数が増えてしまう。客ごとの相を補助変数とするのではなく、各相に滞在する待ち客数を補助変数として状態空間を構成する方法（方法２）も可能である。しかし、方法２のように状態空間を選ぶ場合でも、その状態数は待ち客数に対して増大する。ただし、方法１のように指数関数的に増大するわけではない。図３に相型分布の相の数を 3 とした場合の、両者の状態数の変化を示す。縦軸が状態数であり、横軸が待ち客数である。この例はコールセンターのモデルにおいて、サーバ数が 3 で、かつシステム容量（最大の待ち客数）が 9 の場合に相当する。相に滞在する待ち客数を補助変数とする場合は、待ち客ごとに相を補助変数とする場合に比べて、およそ 100 分の１にまで状態数を削減できることが分かる。

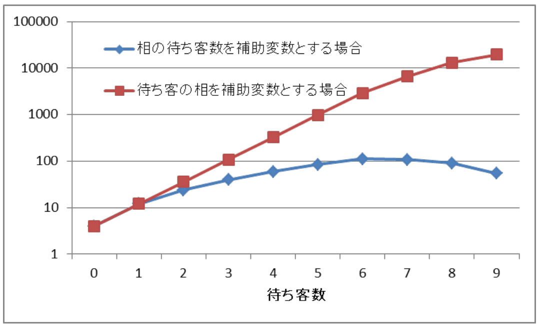


図３：状態数の推移

状態空間の構成方法の違いにより、どれくらいの規模まで数値計算が可能かを、メインメモリが 24ＧＢ搭載されている計算機上で検証した。相型分布として相の数が $k$ であるようなアーラン分布を仮定する。システム容量が 6 の場合、すなわち待ち客数が最大 6 人で、相の数 $k$ を増大させる場合（Case 1）と、相の数は $k$=3 に固定し、システム容量を増やす場合（Case 2）のそれぞれについて、メモリ不足に陥らない最大の変数の値を測定した。その結果を表１に示す。Case 1 と Case 2 の両者について、方法２がより大きなサイズの状態空間を扱えることが分かる。例えば、Case 1 の場合、方法１では相の数が 6 までしか扱えないが、方法２により 2 倍まで相の数を増やすことが可能である。相の数が増えるとより自由度の高い相型分布が構成できるため、方法２が方法１に比べてより効果的であることが分かる。Case 2 においても、方法２はより大きなシステム容量を扱えることが分かる。システム容量が大きくなれば、より大規模な待ち行列システムに近づくことを意味するので、この場合も方法２が効果的であることが分かる。このように方法２はマルコフ過程の状態空間のサイズを抑制しつつ、自由度の高い、あるいは大きなシステム容量をもつ待ち行列システムが解析できるという意味で非常に効果的であることが確認できる。

表１：数値計算可能な変数の最大値

| | 増加する変数 | 方法１ | 方法２ |
|---|---|---|---|
| Case 1 | 相の数 | 6 | 12 |
| Case 2 | システム容量 | 9 | 40 |

(4) 客の待ち時間に制限がある待ち行列システムについて、到着過程がポアソン過程で、サービス時間が指数分布に従い、かつ制限時間が一般分布に従う場合を検討した。本モデルの場合、客が待つ確率などの性能評価指標を得るためには、２重積分で表現される次の $J$ の評価が必要不可欠である。

$$J=\int_0^\infty \exp\{\lambda\int_0^x (1-G(u))du - c\mu x\}dx.$$

ただし、λは客の到着率、μはサービス率、$c$ はサーバの数であり、$G$ は制限時間の分布関数である。本検討では $J$ をラプラスの方法により近似的に評価した。その結果、トラヒック密度 $\rho=\lambda/(c\mu)$ が１より大きい場合については、ラプラスの方法を適用することで、$J$ の上界を近似的に与える評価式が解析的に導出できることを確認した。この上界は、制限時間の分布関数から構成される非線形方程式を数値的に解くことが必要であるが、その点を除けば初等関数のみで評価可能であり、積分の計算を回避できる利点を持つ。厳密に数値積分をした場合と比較した結果を表２に示す。サーバ数が 40、平均サービス時間が 40 である指数分布、制限時間が平均値 40 である 2 次のアーラン分布である場合を想定する。表２の数値例においては、上界の近似値は厳密解を上回り、かつ厳密解から大きく乖離していないと判断される。この結果は、$J$ の上界を与える近似式を用いることにより、性能評価指標についてもおおよその値の評価が可能となることを示す。

表２：$J$ の厳密評価と近似評価

| ρ | 1.1 | 1.2 | 1.3 |
|---|---|---|---|
| 厳密解 | 3.28E+01 | 1.07E+02 | 4.67E+02 |
| 上界 | 3.86E+01 | 1.17E+02 | 5.25E+02 |

(5) 客の待ち時間に制限がある待ち行列システムについて、到着過程がポアソン過程で、サービス時間が指数分布に従う場合に、客が途中退去する率を近似的に評価することで、待ち行列長を算出し、その近似の精度を評価した。その他にも、有限個の呼源から構成される待ち行列システムについても、制限時間内にサービスが再開されない場合に途中で退去するモデルを解析し、性能評価指標を求めることに成功した。

(6) 本研究課題では、客の待ち時間に制限のある待ち行列システムについて、待ち行列長に関する定常方程式を厳密に、あるいは近似的に解析した。客の制限時間の確率分布、客の到着過程、サービス過程の確率構造を様々に設定し、性能評価指標を算出するアルゴリズムを構築した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）


① T. Phung-Duc and K. Kawanishi, Performance analysis of call centers with abandonment, retrial and after-call work, Performance Evaluation, 査読有, in press, available on line (2014). DOI: 10.1016/j.peva.2014.03.001

② T. Phung-Duc and K. Kawanishi, An efficient method for performance analysis of blended call centers with redial, Asia-Pacific Journal of Operational Research, 査読有, Vol. 31, No. 2, p. 1440008 (33 pages) (2014). DOI: 10.1142/S0217595914400089

③ T. Phung-Duc and K. Kawanishi, Multiserver retrial queues with after-call work, Numerical Algebra, Control and Optimization, 査読有, Vol. 1, No. 4, pp. 639-656 (2011). DOI: 10.3934/naco.2011.1.639


〔学会発表〕（計１０件）


① 河西 憲一: コールセンターのモデル化－待ち行列の視点から－, 2013 年度第１回 OR セミナー「待ち行列チュートリアル」, (株)構造計画研究所, 4 月 20 日, (2013).

② 山浦 賢太郎、河西 憲一: サービス中断中に客の途中退去が伴う有限呼源再呼モデルの検討, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013 年春季研究発表会アブストラクト集, 東京大学本郷キャンパス・東京都文京区, 3 月 5 日-3 月 6 日, pp. 244-245 (2013).

③ フン・ドック トゥアン、河西 憲一: 2 方向通信再呼待ち行列の行列解析法による別解, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2012 年秋季研究発表会アブストラクト集, ウインクあいち・愛知県名古屋市, 9 月 12 日-9 月 13 日, pp. 90-91 (2012).

④ 佐久間 大、井家 淳、小林 正弘、河西 憲一: 利用客が一般許容待ち時間をもつ待ち行列モデルの近似解析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2012 年秋季研究発表会アブストラクト集, ウインクあいち・愛知県名古屋市, 9 月 12 日-9 月 13 日, pp. 88-89 (2012).

⑤ T. Phung-Duc and K. Kawanishi, Modelling of retrial, abandonment and after-call work in call centers, 7th International Conference on Queueing Theory and Network Applications 2012, August 1-3, 2012, Kyoto, Japan.

⑥ T. Phung-Duc and K. Kawanishi, The impact of retrial phenomenon on performance of blended call centers, 9th International Workshop on Retrial Queues, June 28-30, 2012, Seville, Spain.

⑦ 河西 憲一: コールセンターのモデル化－待ち行列の視点から－, 第 7 回「学生・初学者のための待ち行列チュートリアル」, 東京工業大学, 6 月 (2012).

⑧ フン・ドック トゥアン、河西 憲一: A retrial queueing model with abandonment and after-call work, 待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」, ホテルクラウンパレス浜松・静岡県浜松市, 1 月 18 日-1 月 20 日, pp. 1-10 (2012).

⑨ フン・ドック トゥアン、河西 憲一: 途中退去と後処理のある再呼待ち行列システムの安定条件, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2011 年秋季研究発表会アブストラクト集, 甲南大学岡本キャンパス・兵庫県神戸市, 9 月 15 日-9 月 16 日, pp. 218-219 (2011).

⑩ 河西 憲一: 途中退去のある待ち行列モデルの近似解析, 日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列部会, 京都大学品川オフィス, 4 月 (2011).


６．研究組織
(1)研究代表者


河西 憲一（KAWANISHI, Ken’ichi）
群馬大学・理工学研究院・准教授
研究者番号：50334131