様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　5 月 21 日現在

機関番号：13902
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：23531185

研究課題名（和文）算数・数学的活動の段階論による式指導の実践的研究

研究課題名（英文）The Design for Active Learning of Expressions Based on Level Theory

研究代表者
佐々木　徹郎（SASAKI, Tetsuro）

愛知教育大学・教育学部・教授

研究者番号：20170681

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：　わが国の算数科における式の指導では，問題の文章を読んだ直後に，式を立てる学習がなされることが多い。また，中学校以降の数学学習でも，立式や式の処理に困難を抱えている生徒は多い。
本研究成果は，算数・数学科における式の指導過程を，算数・数学的活動の段階論に基づいて実践的にデザインしたことである。これによって，児童・生徒は活動的に学習を進めることが可能となった。
つまり，児童は問題の状況を，絵や図，ブロックなどで簡潔に表現する。このとき，児童の主体的な表現が大切である。この活動から，「意味の連鎖」によって，式に表現する学習へと活動レベルを高める指導をデザインしたのである。

研究成果の概要（英文）：In Japanese teaching of mathematical expressions at elementary school, pupils are used to make an expression just after reading the problem. The resulut of the study is to design teaching mathematical expressions based level theory of mathematical activity.
In fact I design that pupils express a problem situation with picture or figure, blocks as its model on their own way, to get to mathematical expression activity successively following "the chain of significance".

研究分野：数学教育学

キーワード：算数・数学的活動　式の指導　文章題　数学的活動の段階論　意味の連鎖　アクティブ･ラーニング　表現活動　モデル化

１．研究開始当初の背景

(1)多くの児童･生徒がもっている数式への困難や嫌悪の原因は何かという問題意識があった。わが国の式指導では、児童が、算数の文章題を読んだ直後に､「式はどうなりますか」と問う指導になっていることに原因があると推測した。本来は、文章題を考えて、解決する過程で､「式に表現する」活動になるのが自然である。

(2)数学学習においても､生徒が立式や式の処理に困難を抱えていることは多い。中学校では､「演算としての式」から「対象としての式」への質的発展を理解できるような指導が必要である。

２．研究の目的

算数・数学的活動として児童・生徒が数式を学習するような指導を実践することが目的である。そのために、算数・数学的活動の段階論によって、算数・数学的活動の段階を明確にする。また、「本質的学習環境」を参考にして、教材や授業のデザインについて考察する。

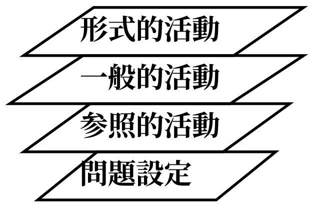
３．研究の方法

(1)オランダのフロイデンタール研究所による「現実的数学教育 (Realistic Mathematics Education)」に関する研究成果を収集した。また、ドイツの数学教育学者 Wittmann の「本質的学習環境」について、教材や授業のデザインについて考察した。

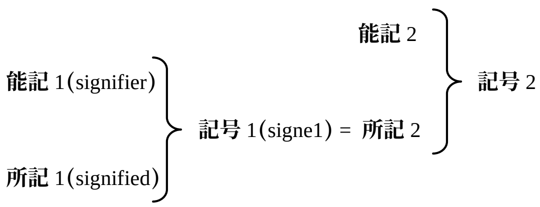
(2)わが国の式指導について､教科書などの教材や､授業記録などを検討した｡そして、活動の段階論を参考にして、算数の文章題指導についての教材や数学における文字式の指導についての授業分析をした。それらは算数・数学的活動としての観点からの分析である。特に、言語分析の視点から、授業における児童・生徒の発言や教師とのコミュニケーションなど児童・生徒のディスコース分析をした。

４．研究成果

(1)算数･数学的活動についての考察を深め、基礎理論を構築した。Saussure の言語学や Vygotsky の理論などを基礎として、「現実的数学教育」における算数・数学的活動の段階論を明確にした。算数・数学的活動の段階論は、問題設定から、参照的活動、一般的活動、形式的活動へと段階的に活動が展開するという理論である。次のような階層的図にまとめることができる。



また、この理論は「意味の連鎖」と深く関連している。意味の連鎖は，フランスの言語学者 Saussure や精神医 Lacan の記号学から構想された記号化の過程である。これは，算数・数学的活動の発展を考察するには有用である。また，表現と思考の発達とは不離一体のものとされている。



(2)わが国の式指導について，教科書などの教材や，授業記録などを検討した。そして，算数・数学的活動の段階論を参考にして、算数の文章題指導についての教材や数学における文字式の指導についての授業研究をした。それらは算数・数学的活動としての観点から分析した。特に、言語分析の視点から、授業における児童・生徒の発言や教師とのコミュニケーションなど児童・生徒のディスコースを分析した。

(3)平成24年11月に高校数学の研究授業として，数学Ａの「場合の数と確率」の授業についての実践事例がある。

〈ロシアの結婚占い〉

ロシアの農村に古くから伝わる｢結婚占い」です。

長さが 20～30 センチの「麦わら」６本を握ります｡手の上から出ている６本のうち、２本を選び、結びます。自分で結ぶのが難しければ、誰かに結んでもらいます。

次に、手の下から出ている６本のうち、２本を同じように結びます｡また上に戻り、残っている４本のうち２本を選び、結びます。このとき、手で握っている部分は決して開いてはいけません。上、下、上、下と繰り返して、最後は、上も下も結びます。

全部結び終わったら手を開き、結んだ部分がほどけないように注意しながら｢わら」を大きく広げます。このとき、完全に一つにつながり、大きな輪ができたら、その人は心に思っている人と一年以内に結婚でき

るという話です。

教師はまず，生徒に予想させ，大きな輪ができる確率は, 低いと推測した。そして, 実際に紐を使ったシミュレーションをして，生徒に実験をさせた。生徒は，各班に分かれて実験を繰り返し，学級全体で 100 回の実験になった。その結果，大きな輪が一つできたのは 45 回で, 予想以上に確率は高いのではないかということになった。

教材のおもしろさと実験という操作活動によって, 生徒は積極的に取り組んでいた。高等学校数学の授業で，このように生徒が主体的に取り組む姿は珍しい。また，実際に紐を使って実験することで，紐の一方は既にランダムに結ばれているという条件で考えればいいということに気付いてきた。

しかし，式による計算によって，その確率を求める段階になると，生徒は急速に消極的になった。「子どもが引いていく」というような雰囲気であった。それは，立式が容易ではないからである。問題は，紐を操作する活動と計算における式表現のギャップであった。このようなギャップを埋めるには，「意味の連鎖」が有用である。それは，具体的に次の「意味の連鎖」で説明できる。

式　能 4
記号 a,b,c,,d,e,f の操作　能 3
記 4
紐の記号 a,b,c,d,e,f　能 2
記 3=所 4
紐図　能記 1
記 2=所 3
記 号 1=所 2
6 本紐 所記 1

紐を図に表し, さらにそれらに a, b, c, d, e, f といった記号を付け，すべての結び方が 15 通り, 一つの輪になる場合が 8 通りであることを，記号操作で導く過程が必要であった。これが，まさに意味の連鎖なのである。

既に述べたように，実際の授業では式表現に戸惑う生徒が多かった。特に生徒が困難を感じていたのは，すべての結び方が何通りかということであった。

${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 90$

と計算する生徒が多かった。1つの大きな輪ができる場合が,

$4 \times 2 \times 1 = 8$　となることは，多くの生徒が導けていた。そこで，8÷90＝0．09 としている生徒もいた。すると，実験の結果 45% とは大きく違ってくる。つまり，すべての結び方は,

$({}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2) \div 3! = 15$

通りなのである。

高等学校における課題学習では，授業者が，このように，生徒が興味をもつ教材を開発することは，何よりも重要なことである。そして，数学的活動の段階論，「意味の連鎖」などによって，教材を活かすことが可能となる。そして，このような実践が, アクティブ・ラーニングになる。

(4) 小学校第 2 学年の教科書の内容について、次のような指導を提示した。

「赤いばらの花が 12 こ, 白いばらの花が 5 こさいています。あわせて何こさいていますか。」という問題である。まず，所記１は，実際のばらの花である。教科書では, ばらの絵が描かれている。これが能記１である。普通には，これらは特に区別することなく，記号１として一体のものとして考える。このばらの絵を所記２として，数図ブロックで記号化する。これが能記２である。これらが記号２となり，さらに所記３として，線分図に記号化される。これが能記３である。この記号３を所記４として, 式表現する。これが能記４となる。次のような図式になる。

式　能 4
記号 4
線分図　能 3
記 3=所 4
ブロック　能 2
記 2=所 3
ばら絵 能 1
記 1=所 2
ばら　所 1

このように問題解決の過程を表現活動としてみれば，児童が実際の意味を連鎖させながら，記号を抽象化していき，式という形式的活動に到達する筋道が明確になる。この過程を，一気に進める児童もいるだろうし，また丁寧に進む児童もいる。教師は, 児童の表現内容をみていくことで，思考の過程を指導するのである。

(5)　小学校における立式の指導の実践事例がある。愛知県内の公立小学校 3 年を対象として，実践されたものである。この実践研究で，注目されるのは，わり算の答えを、ブロックを使って求める活動から，かけ算の逆演算として答えを求める活動へと自然に，連続的につながるように指導していることである。後者の内容を，児童から引き出すのは難しい。そのために実践された，この教師の指導の工夫は，立式の指導を考察するために適切な事例となっている。

この授業は，算数・数学的活動の段階論に基づいてデザインされた。まず，「18 このいちごを，3 人で同じ数ずつで分けると，1 人分は何こになりますか。」という問題を設定する活動から始まる。次に，ブロックを使った操作的な活動によって答えを求める。これは，モデル化の活動である。ここまでは，自然な流れで授業は進んでいく。

問題は，次の一般化の活動である。ブロックなどの具体物を操作して問題を解決する，モデル化の活動では，解決できる問題の範囲は限定される。いちごの数や人数が変化して，一般的な問題になると対処できない。そこで，解決の方法を一般化する必要がある。つまり，すでに学んでいる乗法の逆演算として，わり算の答えを求めることである。

この段階は，児童たち自身が主体的に移行することは困難である。大抵の教師は教科書に従って，この段階を孤立させて指導する。つまり，前時までの操作活動とかけ算を利用することが関連していないのである。児童たち自身が主体的にこれらの関係を構成することにより，一般化の活動に参加する実践は少ない。

本実践における教師は，児童と安易に妥協することなく，一般化の活動を指導している。その鍵となったのは，「はい，ブロックしまって。ブロックなしで，どうやって計算しようか」という発問であった。このとき，児童の態度は一変した。答えは，ブロック操作で既に分かっている。しかし，問題は計算によって答えを求めることだということが理解できたのである。

「いちごが 18 こで，人数が 3 人，3 の段の九九を探して，答えが 18 になる九九を探して，そしたら，3×6 は 18。3 人にあげたいちごは 6 こ」という児童の発言があった。これは，乗法九九を使って答えを求める方法を考えたのである。さらに教師は，児童たちに簡潔な「穴あきかけ算」を想起させている。この考えは，教師と児童たちの相互作用によって，創発されたものである。この発言によって，児童たちが「分かった」という表情を示した。

ここで重要なことは，教師の「ブロックをしまって」という指示は，決して日常的なものではなく，かなり特異なものだということである。教師にとっては，具体物の操作から，式という記号の操作へと，児童の活動を高めるための指示であった。教師にとっては，「乗法九九を使って，わり算の答えを求める」という明確な目標があったものの，児童にとっては，意外な指示であっただろう。

しかしながら，その指示は，算数的活動の全体的な繋がりや，児童の主体的学習を進める学習指導になっている。

(6)数学の架空性は、生徒が学習困難なところになっている。これも、意味の連鎖で説明することができ、また活動的に指導できることを示した。

中学校 1 年の「一次方程式」の学習である。天秤から一次方程式へと記号化される中で，現実性は弱まり，架空性が強くなっていく。まず記号 1 である。天秤を使って重さを測るとき，天秤の両側から同じものを取っていくというような操作は普通しない。生徒 A が，操作したように，未知な針の重さを測るには，片方に針を載せ，他方に 1 つずつコインを載せていくのが現実的操作である。記号 1 の操作には，すでに架空性が含まれているのである。

さらに，記号 2 では，「$x = 3$ 」という形になるような操作が求められている。これは「方程式を解く」という目的があるからである。ある生徒は「釣り合いを保ったままで」という指導に従ったものの，その目的を理解していなかった。「$2x + 1 = x + 4$」の両辺から「$x = 3$ 」を引いて，「$x + 1 = x + 1$」という方程式を導いている。この操作は，数学的には正しくても，教師が想定している操作ではない。しかし，この記号化のなかには「架空性という規則」が含まれていることを，教師は意識しなければならないのである。つまり，生徒 A は，「方程式を解く」という「ゲーム」に，参加していなかったのである。

この事例から分かることは，記号化の過程の中で，架空性が創発されているという事実である。算数・数学の授業においては，このような記号化の過程を経る中で，架空

性の高い数学の世界に，児童・生徒は導かれていく。しかしながら，事例が示す通り，現実性という制約に束縛され，記号化に困難を抱えている生徒がいることに留意しなければならない。意味の連鎖は，このような生徒の学習を分析するために有用である。

〈引用文献〉
愛知教育大学附属高等学校 、第 32 回高校教育シンポジウム　第 2 分科会　数学科　数学Ａ　青山和宏、2012

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① 佐々木徹郎、算数・数学的活動における「意味の連鎖」、愛知教育大学数学教育学会誌　イプシロン、第 56 巻、査読無、2014、9-14、ISSN 0289-145X
② 佐々木徹郎、わが国の算数・数学教師教育における教材研究、日本数学教育学会第 1 回春期研究大会論文集、査読有、2013、187-190
③ 佐々木徹郎、算数・数学科における言語活動の指導、愛知教育大学数学教育学会誌　イプシロン、第 55 巻、査読無、2013、 1-6、ISSN 0289-145X
④ 佐々木徹郎、わが国「数学教育学」の父　平林一榮」、愛知教育大学数学教育学会誌　イプシロン、第 54 巻、査読無、2012、 1-6、ISSN 0289-145X
⑤ 佐々木徹郎、子どもが「考え、表現する、算数・数学授業－授業の認識論－」、愛知教育大学数学教育学会誌　イプシロン、第 53 巻、査読無、2011、9-12、ISSN 0289-145X

〔学会発表〕（計１１件）

① 佐々木徹郎、中等教育における学校数学のパラダイム　－Chevallard の人類学的手法－、全国数学教育学会第 41 回研究発表会、広島大学教育学部・大学院教育学研究科 L104 講義室（〒739-8524　東広島市鏡山一丁目 1 番 1 号）、平成 27 年 1 月 31 日
② 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 22 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス A 棟 304 講義室（〒730-0053 広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 26 年 5 月 24 日・25 日
③ 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 20 回 D.D.会数学教育学の会、広島大学大学院教育学研究科 C419 講義室（〒739-8524 東広島市鏡山一丁目 1 番 1 号）、平成 25 年 12 月 14 日・15 日
④ 佐々木徹郎、学位論文要旨：数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 19 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス 304 講義室（〒730-0053 広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 25 年 9 月 21 日・22 日
⑤ 佐々木徹郎、数学教育における「教室文化の文化化」のディスコース分析、第 18 回 D.D.会数学教育学の会、広島大学大学院教育学研究科第三・第四会議室（〒739-8524 東広島市鏡山一丁目 1 番 1 号）、平成 25 年 5 月 25 日・26 日
⑥ 佐々木徹郎、数学教育における生命論的教室文化におけるディスコース分析、第 17 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス 304 講義室（〒730-0053 広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 25 年 3 月 16 日・17 日
⑦ 佐々木徹郎、学位論文要旨　数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 16 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス 404 講義室（〒730-0053 広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 24 年 12 月 1 日・2 日
⑧ 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 15 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス 304 講義室（〒730-0053　広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 24 年

9 月 15 日・16 日

⑨ 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の文化化に関する研究、第 14 回 D.D.会　数学教育学の会、広島大学大学院教育学研究科第二会議室（〒739-8524 東広島市鏡山一丁目 1 番 1 号）、平成 24 年 5 月 26 日・27 日

⑩ 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の構成に関する研究、第 13 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市東千田キャンパス 207･404 講義室（〒730-0053 広島市中区東千田町 1-1-89）、平成 24 年 3 月 17 日・18 日

⑪ 佐々木徹郎、数学教育における教室文化の構成に関する構成、第 12 回 D.D.会　数学教育学の会、広島市舟入公民館研修室（〒730-0845 広島市中区舟入川口町 2 番 8 号）、平成 23 年 12 月 3 日・4 日

６．研究組織

(1)研究代表者

佐々木　徹郎（SASAKI, Tetsuro）
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号：２０１７０６８１