様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 １８ 日現在

機関番号：１１３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０００３

研究課題名（和文）量子パンルヴェ系の表現論的研究

研究課題名（英文）Representation theoretic research of Painleve systems

研究代表者
黒木　玄（Kuroki, Gen）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・助教

研究者番号：１０２３４５９３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：任意の対称化可能一般カルタン行列に付随するワイル群双有理作用で生成されるτ函数の量子化を構成した。たとえば、一般カルタン行列がアフィンA_2型ならば量子化されたτ函数は量子パンルヴェIV方程式のτ函数になる。古典版のτ函数は従属変数に関する多項式になる。その結果の量子化を証明した。すなわち、量子化されたτ函数は量子化された従属変数に関する多項式になることを示した。その証明にはカッツ・ムーディ代数の表現のBGG圏における平行移動函手を用いた。以上の構成は量子群を用いて、q差分版の場合に拡張される。

研究成果の概要（英文）：We quantize the tau-functions generated by the birational action of the Weyl group associated to any symmetrizable generalized Cartan matix (GCM). For example, if the GCM is of the affine A_2 type, then the quantized tau-functions are identified with the ones for the quantum Painleve IV equation. The classical tau-functions are polynomials in independent variables. We establish the quantized version that the quantized tau-functions are non-commutative polynomials in the quantized independent variables. The proof is derived from the certain formulae of the translation functors in the BGG category for the Kac-Moody algebra. Using the theory of quantum groups, we can generalize these results to the cases of q-difference analogues.

研究分野：表現論と量子可積分系

キーワード：量子パンルヴェ系　量子群　カッツ・ムーディ代数　ワイル群双有理作用　ベックルント変換　τ函数　共形場理論

1. 研究開始当初の背景

P. Painlvé (と R. Garnier) によって 20 世紀の始め頃に発見された 6 種の Painlevé 方程式は現代では大幅に一般化されており, Painlevé 方程式と同じように良い性質を持つ非線形微分方程式系が多数発見されている. 最近ではさらにその差分化と q 差分化も活発に研究されている. それらの微分方程式系, 差分方程式系, q 差分方程式系を Painlevé 系と呼ぶことにしよう.

Painlevé 系の重要な特徴の一つはルート系で記述されるアフィン Weyl 群の対称性を持つことである. Painlevé 系のパラメーター空間はアフィン Lie 環の Cartan 部分環と同一視され, Cartan 部分環へのアフィン Weyl 群の作用は従属変数の空間への双有理作用に拡張され, Bäcklund 変換と呼ばれている.

ある種の Painlevé 系は従属変数も含めてアフィンルート系の言葉で完全に記述可能である. 多くの Painlevé 系において Hamilton 構造が明らかになっており, より根源的な従属変数である τ 函数 (もしくは τ 変数) を用いた記述も可能になっていたりする.

一方, アフィンルート系で記述できる基本的な数学的対象にアフィン Kac-Moody 代数とアフィン量子展開環がある. 上の歴史を知っていれば, それらの代数に関する表現論の言葉で Painlevé 系を理解できると予想するのは自然だと思われる. Painlevé 系の理論もルート系で記述できる「Dynkin 数学」の一部分だとみなせるのではないか.

この研究の開始時点で一般 Cartan 行列 (一般化されたルート系のデータ) に付随する一般的な場合についてよくわかっていたことは次の 3 つであった.
(1) Kac-Moody 代数の場合に付随する Bäcklund 変換と τ 函数の理論 ([NY]).
(2) Kac-Moody 代数の場合に付随する量子化された Bäcklund 変換 ([K1]).
(3) 量子展開環の場合に付随する量子化された Bäcklund 変換 ([K1]).

野海・山田の仕事 [NY] の深い部分は τ 函数への Bäcklund 変換の作用に関する事柄なのだが, τ 函数の量子化をどのように構成したらよいか, そもそも τ 函数の適切な量子化は存在するのか, などの基本的な問題について何もわかっていなかった.

そのため, τ 函数の量子化の問題に直接挑戦することはあきらめて, Painlevé 系の量子化の周辺の様子を広く眺めてみるしかないのではないかと思われていた.

参考文献

[NY] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.

[K1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, 289–325, Adv. Stud. Pure Math., 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.

2. 研究の目的

この研究の目的は Painlevé 系の量子化を Kac-Moody 代数の理論 (より一般的には 2 次元量子共形場理論) と量子群 (量子展開環) の理論を用いて構成し, その性質を詳しく調べることである.

特に研究開始時点では解決が絶望的と思われていた Painlevé 系の τ 函数の量子化の構成ができれば素晴らしいことである. なぜならば τ 函数は Painlevé 系を含む可積分系の理論においてもっとも根源的な従属変数だと考えられているからである.

3. 研究の方法

研究の方法は, 紙の上にペンで書き込むことによって展開される理論的な考察とコンピューターを用いた非可換代数の具体的な計算の 2 つである.

理論的な考察には, Kac-Moody 代数に関する基礎理論と 2 次元量子共形場理論の組み合

わせと量子展開環と量子群の $RLL = LLR$ 関係式による構成に関する既存の結果を用いた.

コンピューターを用いた計算ではSingularというフリーソフト [DGPS] を用いた. Singular ではG代数と呼ばれるクラスの非可換代数を扱うことが可能である. Painlevé 系の量子化の研究では非可換性が原因のひどく面倒な計算をする必要があり, このようなソフトは非常に役に立つ.

参考文献

[DGPS] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: SINGULAR 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2015).

4. 研究成果

① 研究開始時点では不可能かもしれないと思っていた τ 函数の量子化に成功した ([K2]). しかもKac-Moody代数版だけではなく, 量子展開環版でも成功している.

τ 函数の量子化が困難だったのは, τ 函数と呼ばれる従属変数 (以下 τ 変数と呼ぶ) に関する Poisson 構造が知られていなかったからである. 知られていなかった理由はその量子化の処方箋が発見されたことによって明らかになった. τ 変数は単純コルートに対応するパラメーター変数の正準共役変数の指数函数として導入される. パラメーター変数には数を代入することが前提になっているので, パラメーター変数との Poisson 括弧を考えることは通常ならありえない. これが τ 変数に関する Poisson 構造が知られていなかった理由である.

その処方箋に気付いてしまえば, τ 変数の量子化は易しい. パラメーター変数 $\alpha_i^\vee$ と τ 変数 τ_i のあいだに $\tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}$ という関係式を仮定するだけでよい. 量子展開環の場合も $\alpha_i^\vee$ の代わりに $q^{\alpha_i^\vee}$ を考えるだけで, 完全に同様である.

② 量子化された τ 変数への Bäcklund 変換の作用で生成される量子 τ 函数が従属変数の非可換多項式になることを証明した ([K2]). しかも Kac-Moody 代数版と量子展開環版の両方で証明できた. この結果は野海・山田 [NY] の主結果の量子化および量子化の q 差分版になっている. これはこの研究の成果の中で数学的に最も深い結果である.

野海・山田 ([NY]) では量子化する前の τ 函数の多項式性の証明にソリトンの佐藤理論の一般化を利用している. ひとことで言えば τ 函数の多項式性を行列式 (の一般化) の多項式性に帰着している.

しかし, 非可換行列式は一般にその成分の非可換多項式にはならず, 非可換有理函数になる. そういう理由で量子 τ 函数の多項式性の証明はできそうもない状況に陥っていた.

しかし, ドミナント整ウェイト μ と Weyl 群の元 w に対して定まる量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ が本質的に, $M(\lambda+\mu)$ におけるウェイト $w \circ (\lambda + \mu)$ の特異ベクトルを $M(\lambda)$ におけるウェイト $w \circ \lambda$ の特異ベクトルで右から割ったものに等しいという事実に気付き, 表現論を使って割り切れることを証明すればよいということになった. (ここで, λ はドミナント整ウェイトであり, $\circ$ はWeyl群のshifted actionであり, $M(\nu)$, $L(\nu)$ はそれぞれVerma加群とその単純商加群を表わす.)

割り切れることの証明にはKac-Moody代数の表現のBGG圏におけるtranslation functorの理論を使う.

ドミナント整ウェイト λ, μ に対して, translation functor と呼ばれるある完全函手 T が構成され, $M(w \circ (\lambda + \mu)) \cong T(M(w \circ \lambda)) \subset M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu)$ が成立している ([DGK]).

驚くべきことに, 表現論における典型的なパターンの一つであるこの結果から, Kac-Moody 代数版の量子 τ 函数の多項式性が得られるのだ. この結果は τ 函数の圏論的な解釈の可能性も示唆している.

量子展開環版の量子 τ 函数の多項式性の証明はKac-Moody代数のBGG圏と量子展開環のBGG圏のテンソル圏同値の存在 ([EK]) という深い結果を使えば同様の方法で得られる.

③ ある特別な形の q 差分 Painlevé 方程式の量子化を量子群を用いて構成することに成功した ([K3]).

たとえば $\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の q 差分版の作用の量子化を量子群を用いて構成し, $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の格子部分の作用によって, q 差分版の Painlevé IV 方程式の量子化を構成した. 方程式の具体形には非自明な形式で q のべきが登場する. (より一般に互いに素な m, n に対して $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の作用の量子化が構成できている.)

④ A 型の量子群を用いて, A 型の q 差分版の Bäcklund 変換の量子化の Sato-Wilson 表示を構成することに成功した ([K3]).

一般にソリトン系は線形な時間発展を Gauss 分解を通して見ることによって得られる. A 型の古典 Painlevé 系にも Gauss 分解を用いた解釈があり, τ 函数は Gauss 分解の対角成分として現われる. Painlevé 方程式の Gauss 分解を用いた表示を Sato-Wilson 表示と呼ぶことにする.

A 型の q 差分版量子 Bäcklung 変換について, 適切な M 行列や Z 行列を構成し, Lax 表示と Sato-Wilson 表示を構成した. Sato-Wilson 表示から量子 τ 函数が Jacobi-Trudi 型の非可換行列式表示を持つことが導かれる.

以上の結果はどれも Painlevé 系の正準量子化に関する極めて基本的な結果であり, この方面の研究の基礎になるものと思われる.

参考文献

[DGK] Deodhar, Vinay V., Gabber, Ofer, and Kac, Victor. Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras. Adv. in Math. 45 (1982), no. 1, 92–116.

[EK] Etingof, Pavel and Kazhdan, David. Quantization of Lie bialgebras. VI. Quantization of generalized Kac-Moody algebras. Transform. Groups 13 (2008), no. 3–4, 527–539.

[K2] Kuroki, Gen. Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions, http://arxiv.org/abs/1206.3419

[K3] 黒木 玄、Painleve 系の τ 函数の正準量子化について、2015 年 9 月 14 日の日本数学会での特別講演のアブストラクト http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150731QuantizationOfPainleveTau.pdf

5. 主な発表論文等

学会発表　(計 5 件)

① 黒木 玄、「Painlevé 系の τ 函数の正準量子化について」、日本数学会、京都産業大学、無限可積分系特別講演、2015 年 9 月 14 日

② 黒木 玄、「Painlevé 系の τ 函数の量子化について」、第 9 回駒場幾何学的表現論と量子積分系セミナー、東京大学大学院数理科学研究科 002 号室、招待講演、2014 年 2 月 14 日

③ 黒木 玄、「互いに素な m, n に対する拡大アフィン Weyl 群の直積 $\widetilde{W}(A_{m-1}^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)})$ の双有理作用の量子化」、日本数学会、京都大学、一般講演、2013 年 3 月 22 日

④ 黒木 玄、「量子 Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示」、日本数学会、九州大学伊都キャンパス、一般講演、2012 年 9 月 18 日

⑤ 黒木 玄、「Weyl 群双有理作用と τ 函数の量子化—量子化された τ 函数の正則性」、日本数学会、東京理科大学神楽坂キャンパス、一般講演、2012 年 3 月 28 日

その他

研究ノートや学会での発表スライドなどが次のウェブページで公開されている。
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/

6. 研究組織

研究代表者

黒木　玄 (KUROKI, Gen)
東北大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 10234593