

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 7 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540007

研究課題名(和文)有限群の表現論におけるブルエ予想の解決

研究課題名(英文)Solution of Broue's conjecture in representation theory of finite groups

研究代表者

越谷 重夫 (KOSHITANI, Shigeo)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30125926

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文):研究課題である「ブルエ予想」が以下の場合に解けた。まず、散在型単純群コンウェイ第3群に対して、ブルエ予想を完全に解決した。次に、位数8の群を不足群に持つ、すべてのブロックに対して、指標に関するブルエ予想を解決した。これはブラウアー以来、35年ぶり前進であった。更に、散在型単純群の一つであるヤンコー第4群に対して以前の結果をより精密化させ、ブルエ予想を解いた。また散在型単純群であるホール・ヒグマン群の二重被覆群に対して、ブルエ予想を解いた。最後に、やはり散在型単純群であるコンウェイ第1群に対して、ブルエ予想を解決した。これの副産物として、素数3に対する分解定数の一部を決定することができた。

研究成果の概要(英文): For the subject "Broue's conjecture", we have been able to prove the following. First of all, we proved Broue's conjecture for the sporadic simple Conway group Co3 completely. Then, we prove Broue's conjecture of character version for an arbitrary block with elementary abelian defect group of order 8. This was the first improvement after Brauer did 35 years ago. Further, we proved Broue's conjecture for the sporadic Janko simple group J4 more precisely. We proved Broue's conjecture also for the double cover 2HS of the sporadic Higman-Sims simple group HS. Finally we proved Broue's conjecture for the sporadic Conway simple group Co1, and as a byproduct we could determine the 3-decomposition numbers for Co1 in part.

研究分野: 数物系科学, 科研費の分科細目: 数学、代数学

キーワード: ブルエ予想 表現論 有限群 ブロック 森田同値 導来同値 アルペリン予想 マッカーイ予想

## 1. 研究開始当初の背景

(1)ブルエ予想は 1988 年に M.ブルエ (パリ第 7 大学教授) により提言された。これは、代数学における有限群の表現論に留まらず、かなり広い多くの他分野にも影響をあたえる大掛かりな重要な予想である。表現が有限型、あるいは無限型であっても良い性質を持っている場合には リッカード、リンケルマン等によってブルエ予想は解決されていた。

(2)一方、一般に無限表現型を持つブロックに対しては、有限群が対称群、一般線形群などの場合を除いては、ほとんど手つかずであった。一部、研究代表者 越谷重夫およびその周辺の研究者による、位数 9 の可換群を不足群に持つ主ブロックに対してのブルエ予想解決と、さらには同じ群を不足群にもつ非主ブロックに対しての幾つかの単発的なブルエ予想解決のみが、平成 23 年度初めころの状況であった。また単純群に帰着できる定理がまだ存在しないのであるが、それでもまず有限単純群、特に散在型単純群に対してのブルエ予想を解決することは、重要課題であった。

## 2. 研究の目的

(1)上記の背景を鑑み、重要な散在型有限単純群およびその被覆群に対して、ブルエ予想を解くことを目標にした。

(2)また、ブルエ予想を解く目的のために大いに役立つ良い道具となり得る定理、理論を開発、発見することを目的にした。

(3)ブルエ予想のより一層の理解を深めるために、この予想の周辺で関係する別の予想、例えばアルペリン予想、マッカイ予想等に関

して考察を深めることも、目的とした。

## 3. 研究の方法

(1)ブルエ予想およびそれに関連する研究をしている海外の世界一流の研究者たちを訪問して、彼ら彼女らと直接、議論、討論を行った。具体的には、23 年度にはイギリス・アバディーン大学ヘリンケルマン、およびケサーン両教授を訪問した。また同年度に、ドイツ・アーヘン工科大学にミュラーおよびネスケ両博士を、またドイツ・イエーナ大学にキュルスハンマー教授を訪問した。これらの訪問から、共同研究の話が持ち上がり、結果として計 5 編程の共著論文を仕上げることができた。その後、イギリス・マンチェスター大学にイートン博士を、イギリス・オックスフォード大学のエルトマン教授を訪問して、ブルエ予想に関して研究打合せを行った。両大学での研究集会では、ブルエ予想に関連するそれまでに得られた結果を発表する講演も行った。24 年度も同様に、ドイツ・カイザースラウターン工科大学にシュベート博士を訪問、ブルエ予想に関係が深いアルペリン重み予想、およびマッカイ予想についての共同研究を行い、論文を完成させた。その後、イギリス・ロンドン市大学、ケント大学、レスター大学、バーミンガム大学等を訪問して、研究打合せおよび研究成果の講演発表を行った。25 年度には、イギリス・マンチェスター大学での研究集会に招待され、ブルエ予想に関係する内容の研究結果を紹介する招待講演を行った。またドイツ・アーヘン工科大学での研究集会で招待講演を行い、またフランス・パリ第 7 大学およびスイス・連邦工科大学ロザンヌ校でもセミナーでブルエ予想に関する研究成果を紹介する招待講演を行

った。その後、カナダ・バンフでの重要な研究集会でも、招待講演を行った。26年度には、まず中国・北京大学で招待講演を行った。これにはブルエ教授本人も出席した。講演のとりを務めたブルエによる講演の直前に、研究代表者は、ブルエ予想の研究成果を発表した。ブルエ自身と研究打合せしたことは云うまでもない。その後、フランス・リュミニエでの研究集会でも招待講演を行った。ここでもブルエ本人と一緒に、ブルエ予想の更なる研究前進のための討論を行った。

(2) 一方、国内での研究集会でも、ブルエ予想に関して今回の研究で得られたいくつかの結果を講演発表した。すべて招待講演であった。23年度は京都大学数理解析研究所での研究集会で2回(11月と3月)、また浜名湖カリアックでの表現論に関する国際研究集会で招待講演を行った。24年度は、東京医科歯科大学での表現論セミナー等で。25年度にはやはり京都大学数理解析研究所での研究集会で、今回の研究での研究成果を発表した。

(3) 研究している各時点での世界の最新情報、特にブルエ予想に関するものを収集することは、大変重要であることは云うまでもない。そこで、関係する役立つ情報が記載されている図書を購入することは重要であったので、有限群の表現論に関する図書を何冊か購入した。実際これらはとても有益であった。

#### 4. 研究成果

(1) 散在型単純群のひとつであるコンウェー群  $Co_3$  に対して、ブルエ予想を完全に解決した(ドイツのミュラーおよびネスケ両氏との

共同研究)。

(2) 位数8の可換群を不足群に持つすべてのブロックに対して、指標に関するブルエ予想を解いた。副産物として、このブロックに属する指標の個数を決定した。イギリスのケサーおよびリンケルマン両氏との共同研究である。これはブラウアー以来35年ぶりの前進であった。

(3) 上記と同じく、ドイツのミュラー、ネスケ両氏との共同研究で、散在型単純群ヒグマン-シムス群の二重被覆群  $2HS$  に対して、ブルエ予想を完全に解明した。これも主目的は、位数9の可換群を不足群に持つ非主ブロックに対するブルエ予想解明へ向けての、一段階であった。

(4) 前記と同様にドイツのミュラー、ネスケ両氏との共同研究で、散在型単純群ヤンコー群  $J_4$  に対してのブルエ予想を完全に解いた。これは数年前に研究代表者他の結果の精密化になっていた。

(5) ブルエ予想はブロックに関するものであるが、このブロックの構造解明に関する結果、特にブロックのルヴィー列の長さが4の場合に関する結果を得た。ドイツのキュルスハンマー、サンバレ両氏との共同研究であった。ここでは、更に今後の課題としての幾つかの興味ある問題、予想を提示した。

(6) 上記と同様、ブロック、特に主ブロックが長さ4のルヴィー列を持ち、更に考えている表現の基礎体の標数が2の場合に、群の構造を完全に決定した。

## 5. 主な発表論文等

### [雑誌論文] (計6件)

Shigeo Koshitani, On the projective cover of the trivial module over a group algebra of a finite group, 査読有, Communications in Algebra 42 (2014), 4308–4321.

Shigeo Koshitani, Burkhard Külshammer, and Benjamin Sambale, On the Loewy lengths of blocks, 査読有, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 156 (2014), 555–570.

Shigeo Koshitani, Jürgen Müller and Felix Noeske, Broué's abelian defect group conjecture for the sporadic simple Janko group  $J_4$ , 査読有, Journal of Algebra 398 (2014), 434–447.

Shigeo Koshitani, Jürgen Müller and Felix Noeske, Broué's abelian defect group conjecture for the double cover of the Higman-Sims sporadic simple group, 査読有, Journal of Algebra 376 (2013), 152–173.

Radha Kessar, Shigeo Koshitani and Markus Linckelmann, Conjectures of Alperin and Broué for 2-blocks with elementary abelian defect groups of order 8, 査読有, Journal für die reine und angewandte Mathematik 671 (2012), 85–130.

Shigeo Koshitani, Jürgen Müller and Felix Noeske, Broué's abelian defect

group conjecture holds for the sporadic simple Conway group  $Co_3$ , 査読有, Journal of Algebra 348 (2011), 354–380.

### [学会発表] (計10件)

S. Koshitani, Scott modules and its Brauer construction, フランス・中央数学研究所 Luminy, 代数・有限群・幾何・表現-シュバレーセミナー50周年記念研究集会, 2014年9月26日.

S. Koshitani, Broué's abelian defect group conjecture, 中国・北京大学国際研究所, 群と多元環についての国際研究集会, 2014年6月30日.

S. Koshitani, The inductive Alperin-McKay and blockwise Alperin weight conditions for cyclic defect blocks, カナダ・バンフ国際研究所, 有限群の表現論における大域局所予想, 2014年3月17日.

S. Koshitani, Clifford theory of characters in Brauer induction, 京都大学数理解析研究所, 有限群とその表現-頂点作用素代数-代数的組合せ論の研究, 2014年3月4日.

S. Koshitani, Finite groups whose first Cartan invariants are two for  $p=2$ , ドイツ・アーヘン工科大学, 表現論の日々, 2013年12月6日.

S. Koshitani, A finite group whose first Cartan invariant is two in characteristic two, イギリス・マンチェスター大学, ブラウアーの問題50周年記念研究集会, 2013年9月3日.

S. Koshitani, 有限群の表現論における

ある予想に対する部分結果，京都大学数理解析研究所，有限群とその表現-頂点作用素代数-組合せ論の研究，2013年3月6日.

S. Koshitani，私にとっての有限群の表現論，浜松商工会議所浜名湖カリアック，有限群の表現論およびその周辺，2012年9月1日.

S. Koshitani，On Alperin-Scott modules and related topics in representation theory of finite groups，イギリス・オックスフォード大学，第55回ブリストル・レスター・オックスフォード・ロンドン市大学合同研究集会，2012年2月17日.

S. Koshitani，可換不足群を持つ有限群のブロックについてのある注意，京都大学数理解析研究所，有限群のコホモロジー論とその周辺，2011年8月30日.

[図書] (計 0件)

[産業財産権]

出願状況 (計 0件)

取得状況 (計 0件)

[その他]

ホームページ

<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~koshitan>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

越谷 重夫 (KOSHITANI, Shigeo)

千葉大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 30125926

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

功刀 直子 (KUNUGI, Naoko)

東京理科大学・理学部第一部・准教授

研究者番号: 50362306

