様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０００８

研究課題名（和文）古典群・量子群・ヘッケ環の表現論と組合せ論

研究課題名（英文）Representation theory and combinatorics of classical groups, quantum groups and Hecke algebras

研究代表者
寺田　至（Terada, Itaru）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：７０１８００８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：シューア関数の積のシューア関数の和への分解の係数であるリトルウッド・リチャードソン係数はリトルウッド・リチャードソン盤と呼ばれる組合せ論的対象の個数として表される。この係数がシューア関数の可換性に起因してもつ対称性を実現するリトルウッド・リチャードソン盤の間の全単射としてアゼニャシュによって与えられたものが対合性をもつことに対し、キングおよびアゼニャシュと共同で、在来のリトルウッド・リチャードソン盤を用いた証明と、比較的近年クヌートソン・タオによって導入されたハイブと呼ばれる新しい組合せ論的対象を用いた証明とを与えた。

研究成果の概要（英文）：Littlewood-Richardson coefficients, which are the coefficients of products of Schur functions expanded as sums of Schur functions, are described as the numbers of combinatorial objects called Littlewood-Richardson tableaux.
For the bijection between Littlewood-Richardson tableaux given by Azenhas, which realizes the symmetry of Littlewood-Richardson coefficients reflecting the commutativity of Schur dunctions, is given two combinatorial proofs, by collaboration with King and Azenhas, one of which using the conventional Littlewood-Richardson tableaux and the other using new combinatorial objects called hives which have been introduced by Knutson and Tao rather recently.

研究分野：表現論に関係する組合せ論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：リトルウッド・リチャードソン盤　ヤング図形　組合せ論　全単射　対合性　ロビンソン・シェンステッド対応　旗多様体　ハイブ

１．研究開始当初の背景

リトルウッド・リチャードソン係数[リトルウッド・リチャードソンの 2 氏の名前を冠した用語が頻出するので、以下ではこれを LR と略する]の可換性と呼ばれる対称性を実現するアゼニャシュ(O. Azenhas)の全単射(LR 盤の間の全単射)及びその対合性について、平成 19～21 年の研究課題において、複素数係数 1 変数冪級数環上の長さ有限の加群を 1 つ固定したときの、型と余型を指定した部分加群全体のなす複素代数多様体の既約成分の間の、双対加群(直交双対加群)に由来する全単射としての解釈を与え、対合性の証明を与えた。この全単射を初めに与えたアゼニャシュによる雑誌未掲載の論文においては、対合性ついて本質的な考察が種々なされていたが、対合性の証明についてはより完全なものにする必要が感じられた。一方、キング(R. King)は、近年クヌートソン・タオ(A. Knutson, T. Tao)が LR 係数の飽和性予想と呼ばれる予想の証明に際して最初に導入した hive という概念を用いて、トリュ・トゥマゼ(C. Tollu, F. Toumazet)などと共同で LR 係数(や伸長 LR 係数を与える LR 多項式)の積分解などの新しい結果を導いていた。hive は LR 盤の言い換えであるとは言いながら、LR 盤では見えにくい高度の対称性を示し、また成分の実数化が自然に行えるなどの LR 盤にはない特徴をもつ。キングはアゼニャシュの全単射に関心を持って hive の間の写像への言い換えを行い、hive の高い対称性を用いてアゼニャシュの全単射の対合性の証明を透明化することを狙っていた。

また、このほかにも、申請時の研究目的に例として挙げたような、LR 盤やロビンソン・シェンステッド対応などに関連して前から問題になっていながら解決できていない問題がいくつかあった。

２．研究の目的

表現論と組合せ論の交錯する部分を取り上げて、双方の研究者の交流を図り、両方の分野を視野に入れることによって双方に影響を及ぼし合うような成果を上げることを目的とする。特に次のような、ヤング図形の組合せ論を用いて表現論の現象を記述することや、その組合せ論が表すものを具体的に解明し理解することを中心に、関連する対象との関係を含めて追及したい。具体的な項目としては、LR 盤(引き続きリトルウッド・リチャードソンを LR と略する)に関する全単射のスタインバーグ(R. Steinberg)流解釈に加え、ある種の対称性・歪対称性を課した冪零行列の集合の中で優勢なジョルダン型に関する結果の対称の拡大と理解の深化、リー超代数 q(n)とシフテッドタブローの組合せ論、長さと大なり指数の対称性の一般化、有限アーベル p 群の組成列の集合に入る p 元体上のスキームの構造などが考えられる。

３．研究の方法

全体を通じ、研究の進展に資する、あるいは研究の方向の示唆を与えてくれうるような知識や知見を有する研究者との交流を積極的に図る。当方からの訪問、研究集会などの場での討議、当方に招聘しての講演依頼や討議などあらゆる機会・方法を用いる。
また当方の研究の進展経過や成果について、これを示唆として受け取ってくれうるような研究者に対し必要に応じてさまざまな場面で講演や討論を行い、それを通じてさらなる進展のヒントを探る。特に 2012 年 8 月には、この種の組合せ論において代表的な国際会議の 1 つである FPSAC (形式的冪級数及び代数的組合せ論に関する国際会議)が名古屋大学において開催され、上述のような交流の上で絶好の機会となるので、できる限りこれに協力する。

数学的な考察の順序としては、目的に挙げた項目のうち最初の 2 項(LR 盤に関する全単射の解釈、ある種の(歪)対称性をもつ冪零行列の優勢ジョルダン型)から出発し、残りの項目の進展を常に頭に置きながら、交流を通じて得られる方向の発展も図る。特に、アゼニャシュの全単射の対合性の組合せ論的証明を十分一般的な納得行くものにする必要がある。それに際し、キングらの用いている hive もこれに資することが期待される。

４．研究成果

LR 係数は、自然数分割(自然数からなる有限広義減少列、以後分割と略す) 3 個でパラメトライズされる定数(非負整数)である。表現論的な現れ方の 1 つは、一般線型群の多項式表現において、分割 μ に対応する既約表現と分割 ν に対応する既約表現とのテンソル積の中に現れる、分割 λ に対応する既約表現の重複度が、λ、μ、ν をパラメタにもつ LR 係数である。指標のことばで言えば、シューア関数 S_μ と S_ν の積をシューア関数で展開したときの S_λ の係数ということもできる。
これからわかるように、LR 係数はパラメタの μ と ν を交換しても同じ数になる。これが LR 係数の可換性と呼ばれる性質である。

LR 係数は、形が λ/μ、重みが ν の LR 盤と呼ばれる組合せ論的対象の個数に等しいことが知られており、組合せ論、特に全単射組合せ論と呼ばれる分野では、LR 係数の可換性という等式を実現する、形が λ/μ で重みが ν の LR 盤全体の集合と、形が λ/ν で重みが μ の LR 盤全体の集合との間の全単射を構成することが問題にされる。アゼニャシュはこのような全単射を構成した。これはすでに

分かっている等式を実現する全単射だから、それ自体が全単射によって新しい等式を証明したという結果ではないが、一般的に言って例えばロビンソン・シェンステッド対応のような自然で筋のよい全単射を見つけることは、対象となる集合に新しい構造を発見する手掛かりとして重要である。また近年クヌートソン・タオは LR 係数に関して飽和性予想と呼ばれる予想を証明するにあたって、LR 係数を数える hive と呼ばれる別の組合せ論的対象を導入した。 hive (詳しくは整数 hive)は 1 辺が n の正三角形の各辺を n 等分し、全体を n^2 個の小さな正三角形に分割したグラフの各頂点に、菱形不等式と呼ばれる条件をみたすように非負整数を配置したもので、小さな正三角形の各辺(ここでは小辺と呼ぶ)にもその両端の頂点に配置された整数の差がラベルとして付される。全体の正三角形(大三角形と呼ぶ)の底辺上にある n 個の小辺のラベルを並べた数列が λ、大三角形の左の辺上にある n 個の小辺のラベルを並べた数列が μ、大三角形の右の辺上にある n 個の小辺のラベルを並べた数列が ν である hive の個数が上の LR 係数に等しい。従って LR 係数の可換性は、左の辺上の小辺のラベルと右の辺上の小辺のラベルを交換した hive の集合の間の全単射としても実現できるべきものである。

(1) アゼニャシュの全単射の対合性について

これ自体には、前回(平成 19～21 年度)の研究課題において代数多様体の既約成分を用いる証明を与えてある。
当初の計画では、これの組合せ論的証明は、既約成分を用いる証明を述べた論文の序文で先行結果として引用するだけのつもりだったが、組合せ論的証明を完全なものにする必要性がを感じられた。まず，LR 盤(引き続きリトルウッド・リチャードソンを LR と略記する)に対する削除という操作(古典的にシェンステッドやクヌース(D. Knuth)がロビンソン(G. Robinson)・シェンステッド(C. Schensted)対応における挿入アルゴリズムの逆写像として導入していたもののセイガン(B. Sagan)・スタンレー(R. Stanley)による歪盤への適合を LR 盤の特殊性を反映させて改変したもの)としてアゼニャシュが定義した全単射をそのまま用いる証明の骨子を、一応 2011 年度に完成することができた(この時点では日本語のノートのみ)。一方、既約成分を用いる証明をキング氏に説明していたところ、彼はアゼニャシュ氏と共同で、アゼニャシュの全単射を hive の言語への言い換えを、対合性の証明の hive 化を目指して行っていた。その後キング氏と何度も会い、2011 年度中には LR 盤を用いた対合性の証明もキング氏に説明する機会があった。2012 年度の早い時期に氏から、アゼニャシュ氏との共同作業の中で、氏も私の感じた組合せ論的証明を完全なものにする必要を理解し、hive を用いた証明を行う上で LR 盤を用いた証明の中のステートメントを参考にしたいという連絡があり、これ以降 LR 盤を用いた証明と hive を用いた証明の両方にキング氏、アゼニャシュ氏と 3 人で共同で関与することになった。

LR 盤を用いた証明に関してはそれから間もなく一応の英語のノートが出来上がり、2012 年秋の東京での 3 人の共同作業による構成や種々の概念・用語の決定、2013 年夏前の原稿、2013 年 11 月のキング氏の日本訪問時の精査を経た原稿、さらに私の追加校訂を経て、2013 年度中に一応安定原稿に達した。一方 hive を用いた証明の骨子は 2012 年度にはキング氏から示されていたが、2013 年の春ごろに概念・用語を私が少々混乱させてしまったため、少し間を置いて 2013 年度末近くに漸く著者間レビューの状態になった(本筋は美しく出来上がっているが、まだ少し整理を要する部分がある)。現時点での両証明の原稿は併せて 63 ページほどになる。本課題の研究期間は終了したが、2014 年夏に再び 3 人での作業が予定されており、(1)の成果を論文にまとめる作業は何とか完了すると考えている。

hive は LR 盤の言い換えであるとは言え、LR 盤の形では直接見えない高い対称性があり、実数化(連続化)も容易なため、LR 盤とは異なる応用も期待される。一方 LR 盤を用いた証明は、いわゆるクヌース関係との関連を意識したものになっており、このことはこの全単射にまだ十分解明されていない新しい見方を加えることができる可能性を感じさせる。しかし証明の観点がクヌース関係の古典的な証明における挿入アルゴリズムの挙動の記述に影響されたため、その種の議論にそれほど埋没していない人にとってはやや迂遠に感じられるところがあるかもしれない。
hive を用いた証明ではそこがより直接にうまく記述されている。

(2) アゼニャシュの全単射と、盤交換を用いた全単射との一致について

LR 係数の可換性を実現する全単射は、アゼニャシュ以外によってもいくつか構成されており、その中にベンカルト・ストルーマーによる盤交換と呼ばれる、より広い状況で定義される手続きを用いた構成があって、これについてはより広い状況で対合性が既にわかっている。アゼニャシュの全単射とこれとの一致を経由するのもアゼニャシュ全単射の対合性を示す 1 つの方法であるが、この一致の証明も、より完全にする必要が感じられた。この一致についても、LR 盤を用いて、盤交換を行単位に分けたものとアゼニャシュの削

除手続との相互作用を追跡するかなり面倒な証明がまず 2011 年度終わりごろにでき、キング氏の助言によって盤交換を行単位ではなく箱単位で分けることによって単純化した証明のドラフトが 2012 年度にできた。またキング氏によって盤交換の hive 版が、コストカ hive と呼ばれる一般化された hive に対する手続きとして定義され、それを用いた証明のドラフトも 2012 年度に作られた。これは hive の利用としては新しい展開であった。さらに 2012 年度後半には、単に盤交換と削除手続きの相互作用を追いかけるだけでなく、それらのもとにあると(ロビンソン・シェンステッド対応志向の人には)考えられるクヌース関係にさかのぼった新たな証明ができ、これによって個人的には LR 係数の可換性の証明になぜロビンソン・シェンステッド対応に由来する削除手続きが現れるのかがかなり納得できる状態になった。これらを共著論文にするのは 2014 年夏以降になる見通しである。

(3) その他

ハメル・キング共著の論文で提示された、スピノル上の双対対の指標等式を実現する全単射の対合性を示した佐藤巨崇氏の結果や、対称群の中の固定点のない対合と行の長さが偶数の標準ヤング盤との間の 2 種類の知られた全単射の間の関係を論じた加藤真也氏の結果などについてもキング氏と討論を行ったが、これらは共同研究には発展していない。

また 2012 年度の FPSAC '12 は 200 人以上の参加者を数える大変盛大なものであり、それに微塵ほどでも協力(巨大な会場に指し棒代わりに差し入れたつもりの釣竿を置き忘れるなどの迷惑をかけたことを含めて)させてもらったのは、個人的には静かながらも深い喜びである。また、この場では有限アーベル p 群の組成列の集合に入る p 元体上のスキームの構造についても有用な助言を受けた。

雑誌「数理科学」で「表現論の世界」という特集があり、シェンステッド挿入や LR 盤と結晶基底を含むヤング図形が表現論に現れる姿についての必要最小限のコンパクトなサーベイを書いた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

寺田　至、ヤング図形から表現論をさぐる、数理科学、査読なし、51 巻、2013 年、32—33

６．研究組織

(1)研究代表者
寺田　至　　（TERADA, Itaru）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：70180081

(2)研究分担者
岡田　聡一　（OKADA, Soichi）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号： 20224016