科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００１５

研究課題名（和文）リジッド幾何学の代数幾何学への多角的応用の研究

研究課題名（英文）Multifaceted applications of rigid geometry to algebraic geometry

研究代表者
加藤　文元（KATO, Fumiharu）

熊本大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：５０２９４８８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円、（間接経費）　　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：研究成果は主に次の2つに大別される：
(1) リジッド幾何学による高次元軌道体の構成：これは主にテキサス大学オースティン校のDaniel Allcockとの行動研究により進められた。過去の研究を踏まえて、我々は具体的かつ代数幾何学的に極めて興味深い代数曲面を非アルキメデス的2進一意化によって構成することができた。
(2) リジッド幾何学の確固たる基礎付け：これは今般の研究申請において、主に2および3年目に行うこととして記述されていた。この成果は藤原一宏（名古屋）との共著でヨーロッパ数学会から出版予定の『Foundations of Rigid Geometry』（700頁以上）に結実した。

研究成果の概要（英文）：The outcomes of the present research project is two-fold:
(1) Construction high-dimensional non-archimedean orbifolds via rigid analytic uniformizations: This part of the research has mainly been conducted by the joint-work with Daniel Allcock, University of Texas in Austin. Based on the past researches in this field, we have succeeded to give an explicit and algebro-geometrically significant algebraic surface that comes from 2-adic non-archimedean uniformization process.
(2) Building up the solid foundations of rigid geometry: This has been promised in the initial research proposal of this project, meant to be one of the main things to do in the second and third years. This part of the research saw a very successful achievement; with Kazuhiro Fujiwara (Nagoya), we have finished a foundational book `Foundations of Rigid Geometry', containing more than 700 pages, which has been accepted to be published from European Mathematical Society, Publishing House.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：リジッド幾何学　非アルキメデス的幾何学

１．研究開始当初の背景

非アルキメデス的幾何学として出発したリジッド幾何学は，近年その代数幾何学や数論幾何学への応用が目覚ましく研究されるようになった．実際，リジッド幾何学や，その関連として後続したBerkovich空間の理論やHuber の Adic 空間の理論などは，特に近年の数論幾何学においては Galois 表現の理論や楕円曲線の有理点の問題などへの応用が活発である．また，最近の Perfectoid などの新しい数学的対象にも，これらの数論幾何的解析空間の手法が応用されている．こうした現況から，非アルキメデス的幾何学の理論や手法は，今日では広く一般にその重要性が認知され，その応用の広さも認識されるに到っている．

その一方で，リジッド幾何学などの非アルキメデス的解析幾何学を取り巻く現況は，数十年前に比べて，特にその幾何的応用や理論の基礎付けなどにおいて未だに完成されたものになっているとは言えない状況にある．例えば：

●リジッド幾何学の解析的・代数的側面の結節点とも言える非アルキメデス的一意化については，特に高次元での現象があまり捉えられていない．

●また，リジッド幾何学自体の基礎付けについても，まだまだ確実な世界標準が確立されているわけではない．

これらの問題の背景には主に，リジッド幾何学自体が未だ歴史が浅いこともあるが，リジッド幾何学の今後の数論・代数幾何学への応用への可能性の大なることを鑑みると，その基礎付けは急務であると思われるし，また古典的な代数幾何学や数論幾何学との関わりを十分に考察するためにも，リジッド幾何学における諸現象の具体的な側面を詳細に研究する必要があると思われる．

２．研究の目的

上記の背景を踏まえて，この研究では以下の2つの目的を設定した：

(1) 非アルキメデス的一意化における高次元軌道体の理論を将来的に主導するため，その理論面および具体例の構成を目指す．

(2) リジッド幾何学本体の確固とした基礎付けを求め，今後の研究において世界標準となるべき理論を構築する．

(1)はリジッド幾何学の，特に代数幾何学への応用が極めて豊かであると期待される「非アルキメデス的一意化（Non-archimedean uniformizations）の理論にスポットライトを当て，特にその高次元理論の推進を期するところに主眼がある．高次元の非アルキメデス的一意化の理論はすでに 70 年代以来の研究から，一つの理論的パッケージが得られているが，これはすべて「捩れ元をもたない」，あるは言い換えれば「固定点を持たない」一意化に限られている．固定点を持たない一意化は，滑らかな代数多様体を産出する理論として一定の応用が見込まれるが，従来の複素解析的理論においても，例えば不連続群論や超幾何微分方程式論などのとの関わり豊かな理論は，すべて固定点をもつ一意化，いわゆる「軌道体一意化」の理論から得られていた．非アルキメデス的一意化の枠組みでは，筆者が過去に追求した一次元の場合の理論があるが，この理論の高次元化には未だに成功していない．非アルキメデス的一意化は複素解析における従来の一意化の理論に比べて，例えばその形式幾何学との関わりや，Bruhat-Tits 建物などの組み合わせ論的対象との関連が鮮やかな分野であり，従来の理論より，より豊かな数学的構造を明らかにするものと期待されるだけに，この懸案の高次元化は避けて通れない問題である．

また，(2)におけるリジッド幾何学全体の基礎付けという問題は，殊にリジッド幾何学が従来の非アルキメデス的〈解析〉幾何学という枠を超えて，代数幾何学における中心的話題の一つである双有理幾何学（birational geometry）と本質的に関わるものであるという新しい視点に立ったものである．「形式幾何学の双有理幾何学」としてのリジッド幾何学という，より高い視座に立った理論を，その基礎から盤石に構築することは，理論の中身の豊かさや深さ，また応用の多様さから鑑みて，非常に将来性のある研究であると思われる一方，その基礎付けにありがちな技術的困難を克服し，よりわかりやすく使いやすい理論のパッケージ化を目指すことで，リジッド幾何学本体の認知度や応用の可能性もさらに広がるものと期待される．

３．研究の方法

(1) 具体的な非アルキメデス的一意化にまつわる諸現象，特に偽射影平面などの興味深い代数曲面の構成について，その数論的・幾何学的構造をたんねんに調べる．この部分は主にテキサス大学オースティン校の Daniel Allcock 氏との共同研究により行われた．既存の構成を踏まえて，これを拡張・変形し，新しい構造を持った具体例の構成を目指す．

(2) 上記の応用的展開や具体的な例の構成を踏まえて，リジッド幾何学自体の確固とした基礎付けを行う．この部分は名古屋大学の藤原一宏氏との共同研究によって行う．

４．研究成果

(1) リジッド幾何学による高次元軌道体の構成：これは主にテキサス大学オースティン

校の Daniel Allcock との行動研究により進められた。過去の研究を踏まえて、我々は具体的かつ代数幾何学的に極めて興味深い代数曲面を非アルキメデス的２進一意化によって構成することができた。これは偽射影平面と呼ばれる一連の代数曲面の一つであるが，その従来の構成とは違い，一意化において捩れ元の存在を許すというものによって得られた．従来の一意化は，一意化に用いられる不連続群が対称領域（の類似）に作用する際に，固定点を持たないこと状況が主に考えられて来た．これにねじれ元による固定点を許すのが，今般興味の中心にある軌道体一意化であるが，今回得られた偽射影平面はねじれ元を含む群によるもので，そのため過去の人々による研究からは抜け落ちていたものである．この曲面の代数的な性質についてはまだまだわからないことも多く，今後の研究の課題となる．

(2) リジッド幾何学の確固たる基礎付け：これは今般の研究申請において、主に２および３年目に行うこととして記述されていた。この成果は藤原一宏（名古屋）との共著でヨーロッパ数学会から出版予定の『Foundations of Rigid Geometry』（700 頁以上）に結実した。この本は現在計画中の book project の第一巻で，今後も続巻の執筆およびそのための基礎的研究を続ける．

以下に，本の中で述べられていることの大まかな概略を示す：

●「第０章 Preliminaries」は「Preliminaries（準備）」という題名の下に，すでに多くの新しい結果が含まれている．例えば，この章で述べられている一般位相空間論には，過去の位相空間論ではあつかって来なかったタイプの位相空間（例えば valuative spaces；付値的空間）の一般論が詳細に展開されている．このタイプの位相空間はリジッド空間を記述する際，極めて重要となる．のみならず，このように，従来極めて〈解析的〉なとりあつかいを通じて構成を考えられて来たリジッド空間論において，その基礎に位相的な空間の基礎理論を置いたことは，その視点がすでに新しいもの言うことができる．

●「第１章 Formal geometry」においては従来から形式幾何学（formal geometry）として知られて来た一般論を，大幅に一般化・拡張している．これはリジッド空間においては，従来代数幾何学を遂行する上では十分と考えられて来たネーター性の仮定を外す必要があるため，この仮定のない極めて一般的な状況で形式幾何学を展開する必要性があることに基づいている．

●「第２章 Rigid spaces」ではこれらの基礎的準備を踏まえて，極めて一般的な状況でリジッド空間論を論じている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Cornelissen, G.; <u>Kato, F.</u>; Kool, J.: A combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves, Math, Ann. 査読有，掲載予定

② Allcock, D.; <u>Kato, F.</u>: Densest lattices in PGL3Q2, Adv. Math. 査読有, Vol. 242 (2013), 102-115, DOI: 10.1016/j.aim.2013.04.003

③ Byszewski, J.; Cornelissen, G.; <u>Kato, F.</u>: Un anneau de déformation universel en conducteur supérieur, Proc. Japan Acad., Series A, 査読有, Vol. 88, Number 2 (2012), 25-27, DOI: 10.3792/pjaa.88.25

④ <u>Kato, F.</u>: Topological rings in rigid geometry, LMS Lecture Note series 査読有, Cambridge University Press, Vol. 383 (2011), 103-144, DOI: 10.1017/CBO9780511667534

⑤ Fujiwara, K.; Gabber, O.; <u>Kato, F.</u>: On Hausdorff completions of commutative rings in rigid geometry, Journal of Alg. 査読有, Vol. 322, Issue 1 (2011), 293-321, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.02.001

〔学会発表〕（計１０件）

①<u>加藤文元</u>「Comparison of several theories in non-archimedean geometry」Kyushu Algebraic Number Theory, 2014, 2014 年２月５日，九州大学数理学研究院／マス・フォア・インダストリ研究所３階大講義室 1，招待講演

②<u>加藤文元</u>「Combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves」Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 2014 年１月 27 日，東京大学大学院数理科学研究科大講義室，招待講演

③<u>加藤文元</u>「Combinatorial Li-Yau inequality and rational points on curves」p-adic cohomology and its applications, 2014, 2014 年１月８日，東北大学大学院理学研究科数学教室 Kawai Hall，招待講演

④<u>加藤文元</u>「Fake projective planes via p-adic uniformization」Symposium “Combinatorics & arithmetic geometry”,

2013 年 5 月 8 日, Universiteit Utrecht, Minnaertgebouw, room 205, 招待講演

⑤加藤文元「Yet another fake projective plane via p-adic uniformization」九州代数的整数論 2013, 2013 年 2 月 11 日, 九州大学伊都キャンパス伊都図書館 3 階大講義室 1, 招待講演

⑥加藤文元「Yet another fake projective plane via p-adic uniformization」Arithmetic and Algebraic Geometry 2013, 2013 年 1 月 28 日, 東京大学数理大講義室, 招待講演

⑦加藤文元「Accessory parameter in degenerations」Symposium on Arithmetic & Geometry, 2012 年 6 月 2 日, 九州大学伊都キャンパス伊都図書館 3 階小講義室 2, 招待講演

⑧加藤文元「アクセサリー・パラメーターと退化」アクセサリーパラメーター研究会, 2012 年 3 月 15 日, 熊本大学理学部 3 号館 4 階共同研究室, 招待講演

⑨加藤文元「Adic formal algebraic spaces of finite ideal type and rigid GAGA on algebraic spaces」2011 Taiwan-Japan Workshop on Arithmetic Algebraic Geometry and Related Topics, 2011 年 11 月 18 日, Institute of Mathematics, Academia Sinica, 招待講演

⑩加藤文元「The densest lattices in PGL3Q2」南九州代数系集会, 2011 年 8 月 28 日, 鹿児島大学郡元キャンパス理学部 1 号館 10 1 号室

〔図書〕(計 1 件)

①Fujiwara, K.; Kato, F.: Foundations of Rigid Geometry I, to appear from European Mathematical Society Monograph Series (ca. 728pages).

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
該当なし

6. 研究組織
(1)研究代表者
加藤 文元 (Fumiharu Kato)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号:50294880

(2)研究分担者
( )

研究者番号:

(3)連携研究者
( )

研究者番号: