様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 4 月 23 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００１６
研究課題名（和文）アデール群上のボロノイ理論の構築

研究課題名（英文）Construction of Voronoi theory over adele groups

研究代表者
渡部　隆夫（WATANABE, Takao）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：３０２０１１９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円、（間接経費）　　1,140,000円

研究成果の概要（和文）：正定値対称行列のなす対称錐は一般線形群が作用する等質空間であり、整係数一般線形群が固有不連続に作用する。この離散群の作用に関する基本領域を求める古典的方法の一つにVoronoi簡約理論があり、これは生成系の決定やホモロジー群の計算に応用がある。このプロジェクトでは、Voronoi簡約理論における基礎体の一般化と代数群の一般化を研究した。成果として、総実代数体の場合へのVoronoi簡約理論の拡張を得ることができた。また、簡約代数群のアデール群上で定義される算術的最少関数を用いてRyshkov領域を導入し、Ryshkov領域から算術的商空間の基本領域が構成できることを示した。

研究成果の概要（英文）：The group of unimodular integral n by n matrices acts properly discontinuous on the symmetric cone of positive definite n by n symmetric matrices. Voronoi's reduction theory is known as a classical method to construct a fundamental domain on this action. By this theory, one can compute generators and homology groups of discrete subgroups. The purpose of this project is to extend Voronoi's reduction theory to arbitraryl base fields and general algebraic groups. We obtained the following results: We extended a base field of Voronoi's reduction theory to totally real number fields. Furthermore, we introduced Ryshkov domains of adele groups by using arithmetical minimum functions, and then constructed fundamental domains of arithmetic quotients of adele gropus via Ryshkov domains.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論　アデール群　簡約理論　エルミート定数

１．研究開始当初の背景

n 変数正定値２次形式全体のなす対称錐上で、算術的最少と２次形式の被約判別式との比により Hermite 関数が定義される。Hermite 関数の極値決定問題は格子球充填問題との関係で１９世紀後半から研究の対象とされ、２０世紀初頭の Voronoi 理論による進展を経て、その後１９６０年代以降、Koecher、Ash、Martinet、Coulangeon、Bavard 等が、対象とする領域や Hermite 関数の一般化のもとに Voronoi 型定理の拡張を研究した。研究代表者自身も 1990 年代後半からこの研究に取り組み、これまでの研究において、Hermite 関数が有理数体上定義された Grassmann 多様体上の Arakelov 高さ関数と関係があることを見出し、このことから代数群の Hermite 定数の理論を構成した。一般に、代数体上定義された連結簡約代数群とその極大放物的部分群が与えられたとき、アデール群上で極大放物的部分群に依存する標準的な高さ関数が定義され、さらに Hermite 関数の一般化を与える関数がアデール群上に定まる。Hermite 定数の研究は、このアデール群上の関数の最大値のみを扱うものであるが、より広く極値問題と捉え直すことで Voronoi 型理論が自然にこの枠組みの上に構築されるのではと考えたのがこの研究の動機である。またこのような問題設定は、Koecher、Ash、Coulangeon の研究を数論的な観点から統一拡張するものとも見なせる。

２．研究の目的

古典的な Voronoi 理論の要諦は、まず完全形式という特殊な対称錐の点をすべて求め、各完全形式から定まる完全錐により対称錐の有理完備化を錐分割することと言える。完全形式を捉える効果的な方法として Ryshkov により発案された算術的最少関数の Ryshkov 多面体がある。Ryshkov 多面体は対称錐に含まれる局所有限多面体で無限個の頂点を持ち、任意の完全形式は Ryshkov 多面体のある頂点の定数倍になること、逆に Ryshkov 多面体の任意の頂点は完全形式になることが知られている。よって完全形式は(定数倍を除き)Ryshkov 多面体の頂点と同一視できる。アデール群上に一般化された Hermite 関数に対する Voronoi 理論を構築するうえで、完全形式に対応する概念をどのように定式化するかは主要な問題の一つであり、上述の同一視のアイデアから Ryshkov 多面体に対応する領域の構成問題が生じ、加えてアデール群の算術商の基本領域がどのように関係するか等一連の問題が自然に出てくる。この研究の目的は、これら一連の問題を解決しつつ、Voronoi 理論構築の過程をとおして従来の理論および代数群の整数論・簡約理論に新しい視点と結果を付与することである。

３．研究の方法

最初にいくつかの具体的なケース（一般線形群やシンプレクティック群等）についてのケーススタディを行い、そこで得られた結果をもとに一般の代数群の場合を考察するという方針で研究を行った。有理数体上の一般線形群で、極大放物的部分群として１次元線形部分空間をスタビライズするようなものをとった場合、対応する Voronoi 理論は古典的 Voronoi 理論と一致する。そこで同じ群で、基礎体を有理数体から代数体にした場合には、対応する理論がどのように記述されるかを調べた。さらに一般線形群での考察をもとに、簡約代数群での理論構築を、Ryshov 領域の構成および基本領域との関係記述に焦点を絞り行った。また、シンプレクティック群で極大放物的部分群として Siegel 型放物的部分群をとった場合には、Siegel による基本領域の構成が知られており、とくにランク２のケースでは Gottschling の結果から基本領域境界面を与える式が具体的にわかる。このケースで境界面の０次元セルは Ryshkov 領域の０次元セルの一部となるため、その数値例計算を研究分担者の早田孝博と連携研究者の織田孝幸と共に進めた。計画の具体的実行に当たり、研究代表者と研究分担者および連携研究者は度々会い、討議を重ねて各々の計算を進めた。研究代表者の渡部と研究分担者の早田は２０１２年３月に Bordeaux 大学を訪問し、Renaud Coulangeon と討論・情報交換をした。また関連する雑誌・書籍を購入し情報集積を行い、適宜情報収集と研究成果の報告を行うために国内外で開催される整数論、代数的組み合わせ論など関連分野の研究会や数学会の学会に出席した。

４．研究成果

(1) 総実代数体上定義された一般線形群における Ryshkov 領域の記述と Voronoi 簡約理論の構成を林琢磨、矢野祥士との共同研究により完成させた。より具体的に、一般の代数体上で Ryshkov 領域を構成し、その境界面の交叉関係が最短ベクトルを使って記述できることを示した。また Ryshkov 領域の頂点(完全形式)を順次決定するアルゴリズムを与えた。更に、総実代数体の場合には、各完全形式から定まる Voronoi 錐から、数論的離散群の基本領域が構成されることを示した。この研究成果は Koecher による自己双対等質錐上に作用する離散群の簡約理論に関する一般論を精密化したものである。Koecher の理論から基本領域を具体的に記述するのは困難であるが、我々の理論は完全形式の決定アルゴリズムをもつので、Voronoi 錐を具体的に計算することが可能であり、基本領域を精確に記述できる。特に次元が最少の場合は、この結果から新谷の単数定理の具体的記述が導出できるという重要な応用をもつ。この結果は論文としてまとめられ出版された。ここでの結果をもとに、Dan Yasaki は実２次体のケースを詳細に調べる研究を始め、Oliver

Braun と Renaud Coulangeon は虚２次体ケースについて研究をしている。また Coulangeon と Gabriele Neve は斜体上の一般線形群の Voronoi アルゴリズムを用いて、単純環の極大整環の単数群の中の極大有限群の分類を行うなど、応用面の研究も進み始めている。

(2) 研究分担者の早田孝博は、ランク２のシンプレクティック群の Siegel による基本領域を織田孝幸と解析し、計算機と数式処理のツールを用いて境界の０次元セルを決定した。この結果は論文としてまとめられ出版された。その後、織田孝幸は，境界面の特徴を調べる研究を進展させている。

(3) 一般の簡約代数群のアデール群上で定義される Hermite 関数に対し Ryshkov 領域を定義し、Ryshkov 領域内にアデール群の算術的商空間の基本領域が構成できることを示した。さらに Hermite 関数の任意の極大値は、この基本領域の境界と Ryshkov 領域の境界の交わりの上で実現されることを示した。この結果は、有理数体上の一般線形群及びシンプレクティック群に対する Grenier 及び Siegel の基本領域の構成を特別の場合として含む。以上の結果は論文としてまとめられ、Pacific Journal Math. に受理され近々出版される予定である。

(4) 研究代表者は伊吹山友義と共同で、2011 年 10 月 31 日から 11 月 5 日にかけて、「Reduction Theory and Applications to Automorphic Forms」のタイトルで簡約理論の研究集会を白馬で開催した。この集会では簡約理論の背景から現在までの進展状況、応用について総合的に討論を行い、Rainer Schulze-Pillot、Renaud Coulangeon、Dan Yasaki、Siegfried Boecherer 達海外研究者との情報交換・交流を図った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① T. Watanabe, S. Yano and T. Hayashi, Voronoi's reduction theory of GL(n) over a totally real number field, American Mathematical Society Contemporary Mathematics 587 巻, 2013, 213 – 232, 査読有,
DOI: 10.1090/conm/587/11680

② T. Watanabe, A survey on Voronoi's theorem, In "Geometry and analysis of automorphic forms of several Varaibles", ed. by Y. Hamahata, T. Ichikawa, A. Murase and T. Sugano, Number Theory and Its Applications, World Scientific, 7 巻, 2012, 334 – 377, 査読有.

③ T. Oda, Cohomology of Siegel modular varieties of genus 2 and corresponding automprphic forms, In "Geometry and analysis of automorphic forms of several Varaibles", ed. by Y. Hamahata, T. Ichikawa, A. Murase and T. Sugano, Number Theory and Its Applications, World Scientific, 7 巻, 2012, 211 – 254, 査読有.

④ T. Hayata, T. Oda, and T. Yatougo, Zero Cells of the Siegel-Gottschling Fundamental Domain of Degree 2, Experimental Mathematics, 21 巻, 2012, 266 – 279, 査読有.
DOI: 10.1080/10586458.2012.653273

⑤ K. Sawatani and T. Watanabe, Type one functions and Voronoi's theorem, Journal of Convex Analysis, 18 巻, 2011, 341 – 351, 査読有.

〔学会発表〕（計　７件）

① 渡部隆夫, 簡約可能代数群の算術商の基本領域の構成, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日, 愛媛大学城北キャンパス.

② 渡部隆夫, Polyhedral reduction of Humbert forms, 「Diophantine Methods, Lattices, and Arithmetic Theory of Quadratic Forms」, 2011 年 11 月 15 日, Banff International Research Station, Canada.

③ 織田孝幸, Application of reduction theory to the construction of automorphic forms, 「Reduction Theory and Applications to Automorphic Forms」, 2011 年 11 月 3 日, 白馬ハイマウントホテル.

④ 渡部隆夫, Polyhedral reduction of GL(n) over a totally real number field, 「Reduction Theory and Applications to Automorphic Forms」, 2011 年 11 月 2 日, 白馬ハイマウントホテル.

⑤ 早田孝博, 0-cells of the Siegel-Gottschling fundamental domain of degree 2, 「Reduction Theory and Applications to Automorphic Forms」, 2011 年 11 月 1 日, 白馬ハイマウントホテル.

⑥ 織田孝幸, Introduction to the classical reduction theory, 「Reduction Theory and Applications to Automorphic Forms」, 2011 年 10 月 31 日, 白馬ハイマウントホテル.

⑦ 織田孝幸, Zero cells of the Siegel -Gottschling fumdamental domain of

degree 2, 「The International Conference "Polynomial Computer Algebra"」, 2011 年 4 月 19 日, Euler International Mathematical Institute St. Petersburg, Russia.

６．研究組織

(1)研究代表者

渡部　隆夫 (WATANABE, Takao)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30201198

(2)研究分担者

早田　孝博 (HAYATA, Takahiro)
山形大学・理工学研究科・准教授
研究者番号： 50312757

(3)連携研究者

織田　孝幸 (ODA, Takayuki)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号：10109415