様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１４７０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４００１７

研究課題名（和文）リーフポセットに関連した表現論的組合せ論とその周辺

研究課題名（英文）Research on combinatorics with representation theory related to leaf posets and surrounding topics

研究代表者
田川　裕之（TAGAWA, Hiroyuki）

和歌山大学・教育学部・教授

研究者番号：８０２８３９４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究で得られた成果は主として次である。leaf poset が multivariable hook length poset であることは, d-complete poset が multivariable hook length poset であることに帰着できることが分かった。連続して 2r 個の穴のあいた Aztec rectangle の domino tiling の個数が, 超幾何級数を成分とする 2r 次の行列式で表せることを証明した。ハンケル型行列式の関連した等式の証明に役立つ超幾何級数の二乗公式を証明した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we mainly obtained the following results: We found that the d-complete poset being multivariable hook length poset implies the leaf poset being multivariable hook length poset. We expressed the number of the domino tilings in the Aztec rectangle with connected 2r-holes by a determinant of the matrix of size 2r whose elements are hypergeometric series. We proved a quadratic formula of hypergeometirc series which is useful for the proof of some kind of Hankel type determinants.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：hook length poset　d-complete poset　leaf poset　行列式　超幾何級数　Askey-Wilson 多項式　Aztec rectangle

１．研究開始当初の背景

1980 年代に D. Peterson は，symmetrizable Kac-Moody Weyl group の minuscule 元を定義し，大変面白い性質をもつことを発見した。2004 年に，本研究代表者は，石川雅雄氏と萩原学氏と共同研究を行い，minuscule 元の研究に関連して，Coxeter group の元に対して fully covering element といった概念を導入し，fully covering element と fully commutative element が完全に一致する Coxeter group は A, D, E 型 Coxeter group に限られることを証明した。

また，minuscule 元に対して定義される heap と呼ばれる poset は「佐藤のゲーム」にも関連していることが，川中宣明氏と仲田研登氏により示され，heap の hook length formula の colored hook formula のような拡張や，Hilman--Grassl algorithm による証明なども得られている。

1999 年に，R. Proctor は，minuscule 元の組合せ論的特徴付けを与え，d-complete poset を導入した（poset とは，partially ordered set, i.e. 順序集合を意味する)。さらに，Proctor は d-complete poset の分類を行い，その組合せ論的構成法も示した。先述のように，d-complete poset は minuscule 元との関連で導入された表現論的背景を持つ順序集合である。しかし，同時に組合せ論的にも興味深い多くの性質を持ち，その一つが，hook length poset との関係である。

hook length poset は 1982 年に B. Sagan により導入された。例えば，分割λに対して定義される shape と呼ばれる順序集合 S(λ) は，よく知られた hook length poset の一つである。S(λ) は組合せ論と表現論において大変重要なものである。実際，λを n の分割とするとき，S(λ) に対する母関数の変数を 1 に置き換えた等式は，分割λに対する標準盤の個数を表し，n 次対称群のλに対する既約表現の次元を表す公式となることが知られている。他の有名な hook length poset には tree や shifted shape などがある。しかし「いったいどのような順序集合が hook length poset になるのか」という疑問に対する明確な回答は未だ得られていない。この疑問に答えようとする試みの一つとして，Proctor は全ての d-complete poset は hook length poset となることを示した。

また Gann-Proctor は，元の個数が 9 個以下の全ての順序集合に対して hook length poset であるかどうかの調査を行い，そのリストを Web 上で発表した。その結果によると，元の個数が 5 個以下の場合には，連結な hook length poset は全て d-complete poset である。他方，元の個数が 6 個以上の場合には，d-complete poset 以外の hook length poset が多数存在することも分かる。

hook length poset のより広いクラスを得るために，本研究代表者は，石川雅雄氏と共同研究を行い，d-complete poset を拡張した leaf poset という順序集合を導入し，それらは全て hook length poset であることを，Schur function の関連した 6 種類の無限和の等式を経由して証明した。さらに本研究代表者は，既知の hook length poset を用いて新しい hook length poset を構成する方法を大きく分けて 3 種類発見した。次がその構成法の一つである：「与えられた hook length poset の母関数が多変数化できるとき（このような poset を multivariable hook length poset と呼ぶ)，その poset のある条件を満たす複数の元に同じ個数の全順序集合を付加して得られる poset は，hook length poset となる」

leaf poset が multivariable hook length poset であることはすでに証明したので，これらの構成法により，かなり多くの新しい hook length poset が見つかっているといえる。Gann-Proctor のリストによると，元の個数が 8 個以下の連結な hook length poset は，leaf poset を出発点とした構成法で全て得られる。しかし，元の個数が 9 個以上になると，これまでの構成法では作成できない hook length poset が出現することも分かっている。従って，hook length poset の研究の更なる発展のためには，新たな構成法の確立と leaf poset の拡張は重要な課題である。

なお，d-complete poset はある種の組合せ論的な条件を満たす順序集合として定義されているのに対して，leaf poset にはそのような特徴付けは現時点では発見されていない。このことは，leaf poset がさらに拡張される可能性をもった poset であることを裏付ける証拠の一つでもある。

２．研究の目的

ある種の母関数が q 整数の積の形で表せる poset は hook length poset と呼ばれ，目に見える形で定義された hook length poset として，現在知られている最も大きなものは，6 種類の系列として定義される leaf poset である。hook length poset の poset の言葉を用いた組合せ論的特徴づけが解明されていないため，leaf poset 以外の poset が hook length poset であるかどうかを判定するためには，poset ごとに母関数の計算が必要となる。

この問題を解決するために，hook length poset の構成法の確立と組合せ論的特徴付け，leaf poset の拡張と組合せ論的及び表現論的意味付け，周辺分野の数学的対象（対称関数，超幾何級数，行列式，Pfaffian，直交多項式等）の解析を目的とした研究を行った。

３．研究の方法

本研究課題で取り扱う題材は，離散的である。数学，特に離散的な研究対象を扱う数学では，具体例の計算が非常に重要であり，具体例を眺めて初めて気づく性質が多いと考えられる。そのため，数式処理ソフトでのプログラミングを十分に利用して具体例を豊富に計算し，その結果を解析して性質や一般化の予想を作り，証明を行うという方法で研究を実施した。

また，本研究では，有限順序集合に対して，有限和ではなく無限和での具体例を扱う必要があった。変数が一つの場合には，無限和を有限和に置き換えて計算する手段の一つとして (P,ω)-partition の理論が知られている。得られた結果の拡張と応用を行うためにも，変数を多変数化する必要があり，上述の理論の多変数化を考案して，証明し，具体例をこれまでよりも容易に計算できるようにした。

さらに，同じ興味をもつ数学者との議論や討論，本研究課題に関する周辺分野の情報収集は，研究を効果的かつ効率よく進めるためだけでなく，研究の飛躍的進歩につながると考え，研究協力者との対面による研究打合せ及び周辺分野の研究集会や学会への参加を積極的に行った。

４．研究成果

本研究では，主として次の研究成果を得ることができた。

(1) Gann-Proctor による 9 個以下の連結な hook length poset のリストを全て解析したところ，133 個の d-complete poset ではない hook length poset のうち，leaf poset でも，leaf poset を出発点として構成できる hook length poset でもない poset が 2 個あることが分かった。これらの poset について詳しく解析を行ったところ，新しい hook length poset の構成法と新しい Schur function の無限和の等式を発見することができた。

また，この構成法を含むこれまでに得られた「既知の hook length poset から新しい hook length poset を作成する構成法」の多変数化，即ち「既知の multivariable hook length poset から新しい multivariable hook length poset を作成する方法への拡張」を行い，系として，元の個数が 9 個以下の hook length poset は全て multivariable hook length poset であること，および 6 種類の basic leaf poset を出発点とする新しい multivariable hook length poset の系列が得られた。

さらに，これらの構成法と d-complete poset が multivariable hook length poset であること（Proctor, Nakada の結果）及び Schur function の性質を用いることで，leaf poset が multivariable hook length poset であることの証明の鍵となっていた Schur function の無限和の公式を導き，系として leaf poset が multivariable hook length poset であることが得られた。このことは，leaf poset がとても性質の良い d-complete poset の拡張であることを示唆しているとも考えられる（雑誌論文④，学会発表①,④参照）。

また，(P,ω)-partition の理論の多変数化を行い，この理論をプログラミングに利用することで，新しい multivariable hook length poset をこれまでよりも容易に探し出せるようになった。結果として， 未解明（leaf poset でもなく，既知の hook length poset から構成することもできない） な multivariable hook length poset が多数発見された。これらの poset の解明は新しい hook length poset の系列の発見につながると考え，今後も研究を続けていきたいと考えている。

(2) 直交多項式の一つである little q-Jacobi orthogonal polynomial の m-th moment を行列成分の一部に含み，Mehta-Wang の Gaussian symplectic ensemble に関連した行列式とそのｑ類似として西澤道知氏が拡張した行列式のさらなる拡張となる行列式の Askey-Wilson 多項式を用いた表示を，行列の基本変形と超幾何級数の既存の等式等を用いることにより証明した。さらに，これまでに得られた Hankel 型行列式に関する結果を系として得るための手段となる Askey-Wilson 多項式についての新しい関係式を証明した（琉球大学の石川雅雄氏，リヨン大学の Jiang Zeng 氏との共同研究，雑誌論文⑤，⑥，学会発表③，⑤参照）。

また，Gram determinant について Wilson が 1991 年に得た結果を，Krattenthaler 型の行列式（任意の行及び任意の列）に拡張し，Wilson の結果の証明にも利用できるｑ超幾何級数の quadratic formula を得た。なお，この行列式は，Mehta-Wang の行列式や Krattenthaler の Catalan determinant 等のこれまでに発見された等式の拡張となっている（華東師範大学の Victor Guo 氏，琉球大学の石川雅雄氏，リヨン大学の Jiang Zeng 氏との共同研究，雑誌論文②，③，学会発表②参照）。

(3) 矩形行列式は，20 世紀初頭に，n×k 行列に対して Cullis により導入された行列式であり，n!/(k!(n-k)!)個の k 次正方行列の行列式の和として表され，通常の正方行列に対する行列式の拡張となっている。そこで通常の行列式に対してこれまで知られている結果がどこまで矩形行列式について成立するのかということを主眼として研究を行い，数え上げ組合せ論での問題解決に有効な手段の一つである lattice path method を矩形行列式へと拡張し，系として Aztec diamond の左右対称な domino tiling の

総数の矩形行列式を用いた表示が得られた。また，矩形行列式の左乗法性に関する新しい結果，及び矩形行列式の Pfaffian を用いた表示を証明し，系として矩形行列式に対する Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を証明した（琉球大学の石川雅雄氏，和歌山大学の坂口弘明氏との共同研究）。また，行列式についてのヤコビの定理，シルベスターの定理の矩形行列式への拡張となる等式も多数予想することができた。

これらの予想式の証明や得られた結果の応用については，今後の重要な研究課題の一つであり，さらに解析を進めていきたいと考えている。

(4) 1×1 のタイルで敷き詰められた図形を domino (2×1 のタイル) で敷き詰めることは domino tiling と呼ばれ，1992 年に Elkies etc によって導入された Aztec diamond (2n(n+1)個の 1×1 のタイルで敷き詰められた周囲が階段状の正方形) は，domino tiling に頻出する図形の一つである。 Aztec diamond の domino tiling の総数が 2 の冪で与えられることは Elkies etc により証明されており，また，京都大学の上岡修平氏は，Laurent 双直交多項式の概念を用いて，Aztec diamond の総数を表す Johansson の行列式の計算を行った。

この上岡氏の手法を拡張する形で，穴が一列に偶数個（=r とする）並んだ Aztec rectangle (n×(n+r) 型の Aztec diamond) の domino tiling の数え上げ問題についての考察を行い，その総数が (2,1) 型の超幾何級数を成分とする行列式を用いて表せることを，Schroder path を拡張して，超幾何級数で表し，domino tiling を拡張された Schroder path で置き換え，lattice path method，LU 分解の拡張等を利用して証明した。また，r=2 の場合には，(4,3)型の超幾何級数１つで表せることも分かった（琉球大学の石川雅雄氏，学習院大学の中野文彦氏，津田塾大学の貞廣泰造氏との共同研究，雑誌論文①参照)。

なお，r>2 の場合にも一つの超幾何級数で表せるのか，何らかの weight をつけた拡張はできるのか等の考察，及び他の図形に対する domino tiling や，domino ではなく 1×3，2×3 などのタイルを用いた tiling への拡張についても今後継続して研究していく予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

①Masao Ishikawa・Fumihiko Nakano・Taizo Sadahiro・<u>Hiroyuki Tagawa</u>, Domino tilings of Aztec rectangles with connected holes，数理解析研究所講究録，査読無，2016 年，掲載決定（印刷中）.

②石川雅雄・<u>田川裕之</u>，An extension of Wilson's Gram determinants，数理解析研究所講究録 1945，査読無，2015 年，38-53.

③Victor J.W.Guo・Masao Ishikawa・<u>Hiroyuki Tagawa</u>・Jiang Zeng, A quadratic formula for basic hypergeometric series related to Askey-Wilson polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society 143，査読有，2015 年，2003-2015.

④石川雅雄・<u>田川裕之</u>，Leaf posets and multivariable hook length property，数理解析研究所講究録 1913，査読無，2014 年，67～80.

⑤Victor J.W.Guo・Masao Ishikawa・<u>Hiroyuki Tagawa</u>・Jiang Zeng, A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials, 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013), DMTCS proc. AS，査読有，2013 年，749～760.
http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/proceedings/article/view/dmAS0161/4252

⑥石川雅雄・<u>田川裕之</u>，A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials，数理解析研究所講究録 1795,査読無，2012 年，204～223.

〔学会発表〕（計５件）

①<u>田川裕之</u>，d-complete poset と leaf poset，2015 年度表現論ワークショップ，2016 年１月 10 日，県民ふれあい会館（鳥取県鳥取市）.

②石川雅雄・<u>田川裕之</u>，An extension of Wilson's Gram determinants，RIMS 研究集会「組合せ論的表現論の展望」，2013 年 10 月 9 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）.

③Victor J.W.Guo・Masao Ishikawa・<u>Hiroyuki Tagawa</u>・Jiang Zeng, A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials, 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013), 2013 年 6 月 25 日，Paris(France).

④石川雅雄・<u>田川裕之</u>，Leaf posets and multivariable hook length property，RIMS 合宿型セミナー「ヤング図形・統計物理に関連する代数的組合せ論」，2012 年 8 月 10 日，国際高等研究所（京都府木津川市）.

⑤石川雅雄・田川裕之，A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials，RIMS研究集会「組み合わせ論的表現論の拡がり」，2011 年 10 月 14 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.center.wakayama-u.ac.jp/~tagawa/

６．研究組織
(1)研究代表者
田川　裕之（TAGAWA，Hiroyuki）
和歌山大学・教育学部・教授
研究者番号：80283943

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：