

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540022

研究課題名(和文)多重ディリクレ級数の数論的性質の総合的研究

研究課題名(英文)Research on arithmetic properties of multiple Dirichlet series

研究代表者

津村 博文(Tsumura, Hirofumi)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：20310419

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：本課題においては多重ディリクレ級数と呼ばれる関数について、その解析的な性質を多方向から研究した。特にその特殊値間の関係式、およびそれらの間の関数としての関係式を導き、さらにはそれらの数論への応用を目標とした。具体的には、抽象ルート系に付随したWitten型多重ゼータ関数、Eisenstein級数の類似と見られる二重ディリクレ級数などについて、名古屋大の松本耕二氏、立教大学の小森靖氏との共同研究を重ね、その研究が大きな理論としてまとまりつつある。とくに二重ゼータ関数に関しては、いわゆる平均値定理と呼ばれるものを導出することができ、今後の数論への応用が強く期待されている。

研究成果の概要(英文)：We study analytic properties of the multiple Dirichlet series from the various viewpoints. In particular, we obtain some value-relations and functional relations for them, and consider their applications to number theory. Concretely we study Witten's zeta-functions associated with the root systems and certain Eisenstein type series as a joint work with K. Matsumoto (Nagoya University) and Y. Komori (Rikkyo University). Our research is being completed as a fruitful theory. As for double zeta-functions, we obtain a new type of the mean value theorem. We greatly expect its application to number theory.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学 整数論 ゼータ関数

### 1. 研究開始当初の背景

20 世紀の終わりごろから多重ディリクレ級数と呼ばれる数論的関数について、その解析的な性質に関する研究が活発になってきた。特にその特殊値の研究や関数としての関係式を導くことが大きな課題となっていた。その過程で一般的な枠組みで多重ディリクレ級数に関する解析的な研究が重要視されていた。一般にこのような関数の正則性や特異点、解析接続の研究は難しいものであったが、この分野の研究者によっていくつかの手法が確立された。そのことから、この分野の研究は進展を見せつつあった。その過程において、Don Zagier 氏によって、いわゆる半単純 Lie 環に付随する一変数の Witten 型ゼータ関数の構成がなされた。これが本課題の主要な研究対象となっている。ただこれは 1 変数であったため、多変数関数論的な考察ができず、その多変数化が望まれるものであった。また Kronecker, Eisenstein, Hurwitz らによって 20 世紀前半から深く研究されている Eisenstein 級数と呼ばれるものの多重化も興味深い研究課題で、解析的には Barnes などによって 20 世紀初頭から研究が進められていた。ただし、その方向の研究は近年あまり大きな発展もなく、いわゆる多重 Dirichlet 級数としての見方から関係式を導出するなどの研究はあまり見られなかった。それに目をつけて、古典的な研究の発展を試みることは自然であるが、その研究手法が難しく、なかなか具体的な成果を得るのは困難であると考えられていた。

### 2. 研究の目的

本課題では、Zagier 氏によって導入された Witten 型ゼータ関数を多変数化した形で一般化した、抽象ルート系に付随した Witten 型多重ゼータ関数を重点的に研究した。また別の多重 Dirichlet 級数として、いわゆる Eisenstein 型多重級数のなどについて、その解析的な性質を調べ、多変数関数論や群論、組み合わせ論的考察と併せて、未知の関係式の導出を試みることを目的とする。近年に渡って継続中の名古屋大の松本耕二氏、立教大学の小森靖氏との共同研究を通して、ルート系に付随する Witten 型多重ゼータ関数の研究は大きな理論としてまとまりつつある。また今まで知られていなかったゼータ関数の関数関係式の導出に成功し、その数論的な応用が、今後の研究の中心の一つとなる。

### 3. 研究の方法

これまでの松本氏、小森氏との共同研究で培った手法を用いて研究を進めた。まず解析接続に関しては、松本氏によって確立された Mellin-Barnes 積分表示を利用する方法、またそれといわゆるワイル群の作用を考えるとという代数的な手法を取り入れて、これまでに得られなかった多重 Dirichlet 級数の特殊値やその関数の満たす関係式を導いた。さらにはその関数の値の母関数をうまく構成することで、本来は計算が困難で

あった関係式を導出することに成功した。また Eisenstein 型級数を扱うためには、楕円関数やテータ関数を利用が不可欠である。そのために、いわゆる古典的な Hurwitz の方法の多重化を定式化することが重要であった。

### 4. 研究成果

大きな成果として、Witten 型の多重ゼータ関数を多変数化したものの一般的な枠組みを確立した(文献[6,9,12,13,15,16])。さらにその具体的な形として、EZ 型や  $A_3$  型ゼータ関数と呼ばれるものに関して深い考察を行った(文献[4,10,11])。また Eisenstein 型多重級数に関して、これまで得られていなかった特殊値の計算や関係式を導出することができた([2,5,7,17])。関連の結果として、多重級数の畳み込み型公式を導いた(文献[1,3])。これは金光滋氏らの研究をベースにしたもので、非自明な関係式が得られた。さらに松本氏との共同研究で、2重 Dirichlet 級数に関する和公式の導出に成功した(文献[8])。これは特別な場合として、よく知られた 2 重ゼータ値の和公式を含んでいる。最新の結果としては、松本氏との共同研究として、二重ゼータ関数の平均値定理を得た(文献[14])。これはいわゆるリンデレーフ予想の多重化をも視野に入れる結果であり、将来的にも数論への応用が期待される。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 17 件)

[1] H.Tsumura, Certain convolution formulas for multiple series, Ramanujan J. 32 (2013), 353-369.

[2] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, J. Ramanujan Math. Soc. 28 (2013), 49-69.

[3] H. Tsumura, On a certain convolution of polylogarithms, Bull. Austral. Math. Soc. 86 (2012), 461-472.

[4] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Functional relations for zeta-functions of weight lattices of Lie groups of type  $A_3$ , in 'Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory', E. Manstavicius et al. (eds), TEV, 2012, pp. 151-172.

[5] H.Tsumura, Analogues of level- $N$  Eisenstein series, Pacific J. Math. 255 (2012), 489-510.

[6] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras III, in 'Multiple Dirichlet Series, L-functions and Automorphic Forms', D. Bump, S. Friedberg and D. Goldfeld (eds), Progress in Math. 300, Birkhauser, 2012,

pp. 223-286.

[7] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Evaluation formulas of Cauchy-Mellin type for certain series involving hyperbolic functions, Comment. Math. Univ. St. Pauli 60 (2011), 127-142.

[8] K.Matsumoto and H. Tsumura, Sum formulas for double polylogarithms with a shifting parameter and their derivatives, Moscow J. Combinatorics and Number Theory 1 (2011), 346-368.

[9] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, A survey on the theory of Multiple Bernoulli polynomials and multiple L-functions of root systems, in 'Developments in Quantum Integrable Systems', A. Kuniba et al (eds.), RIMS Kokyuroku Bessatsu B28, 2011, pp. 99-120.

[10] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, Int. J. Number Theory 7 (2011), 1441-1461.

[11] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Shuffle products for multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems, Math. Zeitschrift 268 (2011), 993-1011.

[12] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Multiple zeta values and zeta-functions of root systems, Proc. Japan Acad., Ser. A, 87 (2011), 103-107.

[13] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras IV, Glasgow Math. J. 53 (2011), 185-206.

[14] K.Matsumoto and H. Tsumura, Mean value theorems for the double zeta-function, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[15] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, On Witten multiple zeta-functions associated with semisimple Lie algebras V, to appear in Glasgow Math. J.

[16] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, A study on multiple zeta values from the viewpoint of zeta-functions of root systems, to appear in Funct. Approx. Comment. Math.

[17] Y.Komori, K.Matsumoto and H. Tsumura, Hyperbolic-sine analogues of Eisenstein series, generalized Hurwitz numbers, and q-zeta functions, to appear in Forum Math. [学会発表](計 7件)

[1] H.Tsumura, A certain double analogue of the Kubota-Leopoldt p-adic L-function, Wurzburg Oberseminar Zahlentheorie, Institut für Mathematik, Wurzburg 大学, 2011年9月.

[2] 津村博文, ルート系のゼータ関数とベ

ルヌーイ数 (II), 第 254 回-数論セミナー, 明治学院大学, 2011年12月.

[3] 津村博文, p 進多重 L 関数の構成とその値について (I), 第 5 回多重ゼータ研究集会 '多重ゼータとその周辺', 九州大学, 2012年1月.

[4] 津村博文, Mean value theorems for double zeta-functions, RIMS 研究集会 '解析的整数論とその周辺 -- 近似と漸近的手法を通して見た数論 --', 京都大学数理解析研究所, 2012年10月.

[5] 津村博文, Desingularization of complex multiple zeta-functions, fundamentals of p-adic multiple L-functions, and evaluation of their special values, RIMS 研究集会 '多重ゼータの諸相', 京都大学数理解析研究所, 2013年7月.

[6] 津村博文, 多重ゼータ関数の特異点解消と p 進多重 L 関数, 関西多重ゼータ研究会, 滋賀大学, 2013年10月.

[7] 津村博文, 多重ゼータ関数の特異点解消と p 進多重 L 関数, 九大代数学セミナー, 九州大学, 2013年11月.

[ 図書 ] (計 1 件)

[1] 津村博文 「代数学」(テキスト理系の数学 10) 数学書房, 2013年.

[ 産業財産権 ]  
出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[ その他 ]  
ホームページ等  
<http://www.comp.tmu.ac.jp/math-tsumura/>  
研究組織

(1) 研究代表者  
津村博文 (TSUMURA, Hirofumi)  
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号 : 20310419

(2) 研究分担者  
なし

(3)連携研究者

松本耕二 (MATSUMOTO, Kohji)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
教授

研究者番号：60192754

小森靖 (KOMORI, Yasushi)

立教大学・理学部数学科・准教授

研究者番号：80343200