様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：２４４０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４００２３

研究課題名（和文）代数群のｍｏｄｕｌａｒ表現

研究課題名（英文）Modular representations of algebraic groups

研究代表者
兼田　正治（KANEDA, masaharu）

大阪市立大学・大学院・理学研究科・教授

研究者番号：６０２０４５７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：Gを正標数pのreductive代数群，Pをそのparabolic部分群，Tをそのmaximal torusとし，G_1をGのFrobenius kernelとする。阿部紀之との共同研究により，p-regular weightを最高 weightとするG_1P-Verma modulesのG_1T-modulesとしての構造を，pが十分大きいときに決定した。H.H. Andersenとの共同研究では，正標数のG_2型のG/B上のline bundlesのcohomologyを明らかにし，M. Grosとの共同研究では，１の冪根での量子群のFrobenius splittingを構成した。

研究成果の概要（英文）：Let G be a reductive algebraic group over an algebraically closed field of positive characteristic p, P a parabolic subgroup of G, and T a maximal torus of P,
G_1 the Frobenius kernel of G. In joint work with Abe Noriyuki we determined the G_1T-structure of G_1P-Verma modules of p-regular highest weights for large p.
In joint work with H.H. Andersen we determined the cohomology vanishing behavior of line bundles on G/B in type G_2 when the corresponding B-modules lie in the lowest p alcoves. In join work with M. Gros we constructed a Frobenius splitting on a quantum group at a root of unity.

研究分野：群論

キーワード：代数群　modular表現　Frobenius kernel　量子群　flag variety　cohomology

１．研究開始当初の背景

Homogeneous projective variety は reductive group G とその parabolic 部分群を用いて G/P と表される。正標数における G/P の構造層の Frobenius direct image は，その endomorphism ring が G/P 上の arithmetic 微分作用素の成す層[Berthelot, P., D-modules arithmetiques I. Operateurs differentiels de niveau fini, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 29 (1996), 185-272]と密接な関係にあり，従来からその構造の解明に努めていた。 更には, その Frobenius direct image から，G/P 上の coherent sheaves が成す bounded derived category が記述できるのではなかろうかという期待があった [Kaneda, M. and Ye, J-C, Some observations on Karoubian complete strongly exceptional posets on the projective homogeneous varieties, arXiv:0911.2568 [math.RT]]。

２．研究の目的

正標数の代数閉体上の G/P の構造層の Frobenius direct image は， G/P が整数環上定義されている為，標数を問わず G/P 上の幾何学について多くの情報を持つことが知られているが， その構造を G_1P の表現論を用いて調べる。G_1 は G の Frobenius kernel。逆に，G/P の構造層の Frobenius direct image の幾何学的性質を用いて，対応する G_1P-Verma 加群の構造を明らかにする。

３．研究の方法

一般の parabolic 部分群 P についての G_1P の表現論は，われわれが創始したものでは無かろうかと思われるが，それを発展させ，上記目的に応用する。

実際には，本邦には斯界の専門家が僅少なため，海外の専門家との交流が肝心になる。Michel Gros との共同研究を継続，発展させて，先に得た結果の量子化が得られた。代数群の modular 表現論における中心課題である G の既約指標に関する Lusztig 予想については，標数が十分大きいところでは，既に解決を見ているが [Andersen,H.H., Jantzen,J.C.,Soergel,W., Representations of quantum groups at a root of unity and of semisimple groups in characteristic p: independence of p, Asterisque 220, 1994(SMF)]，[Kazhdan, D. and Lusztig, G., Tensor structures arising from affine Lie algebras I-IV, Journal of American Math. Soc. 6 (1993), 905-1011, 7 (1994), 335-453]，[Kashiwara, M. and Tanisaki, T., Kazhdan-Lusztig conjecture for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras with negative level II, Duke Math. Journal 84 (1996), 771-813]，[Fiebig, P., An upper bound on the exceptional characteristics for Lusztig ’ s character formula, J. reine angew. Math. 673 (2012), 1-31]，2013 年夏 Geordie Williamson が，元の予想の標数では成り立たないことを発表し，斯界は震撼した。その当人を招聘して，大阪市立大学で連続講演を提供して貰い，ICM 開催の最中にも拘わらず多くの若い研究者の聴講に供せたのは幸いであった。その反例の構成には, Soergel が導入した bimodules [Soergel, W., Kazhdan-Lusztig Polynome und unzerlegbare Bimoduln uber Polynomringen,Journal of Institute of Mathematics Jussieu 6-3 (2007), 501–525]が重要であるが，当報告者は Lyon における Soergel 主催の workshop Representations of Algebraic Groups に参加し， [Soergel, W., On the relation between intersection cohomology and representation thoery in positive characteristic, J. Pure Appl. Math. (2000), 311-335]との関係を Soergel 本人に直接問い質せたのは有意義であった。

４．研究成果

G/P の構造層の Frobenius direct image は，G/G_1P 上の highest weight が 0 の G_1P-Verma 加群を fiber とするような locally free sheaf である。従って，そのような G_1P 加群を調べる。先ず，それを G_1T 加群として考える，T は P の maximal torus。阿部紀之との共同研究⑤により，Lusztig 予想が成立する十分大きな標数 p では，P_1T の p-regular block から G_1T への誘導が，gradable であることを示した。このことにより，highest weight が regular の P_1T-simple 加群から誘導された G_1T-Verma 加群上に，[Andersen,H.H., Jantzen,J.C.,Soergel,W., loc. cit.]が導入した Koszul algebra 上の graded 加群の構造を入れることが出来る。そうすると，[Beilinson, A., Ginzburg, D., Soergel,W., Koszul duality patterns in representation theory,Journal of American Math. Soc. 9-2(1996),473-527] による graded representation theory が使えて，それら G_1T-Verma 加群の Loewy 構造を決定することが出来た。その Loewy series は，rigid であることが分かり，その subquotients 上の multiplicities は， G に関する periodic inverse Kazhdan-Lusztig 多項式 [Lusztig, G., Hecke algebrasand Jantzen ’ s generic decomposition patterns, Adv. Math. 37 (1980),121-164]と，P の Levi 部分群に関する periodic Kazhdan-Lusztig 多項式 [Kato, S., On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups, Adv. Math. 55 (1995), 103-130]を組み合わせた形で記述される。この結果は，P が Borel subgroup の時には，[Andersen, H.H. and Kaneda M., Loewy series of modules for the first Frobenius kernel in a reductive algebraic group, Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), 74-98]によって得られていたが，その当時に

は graded representation theory は無く，別の方法によって居た。

以上の結果をもとに，quadrics 上で，対応する G_1P-Verma modules の data から Karoubian complete strongly exceptional poset of coherent sheaves を構成した④。これらは，整数環上で定義された locally free sheaves であり，複素数体上では，Kapranov が構成していたもの[Kapranov, M.M., On the derived category of coherent sheaves on some homogeneous spaces, Inv. Math. 92 (1988), 479-508]を与えるが，偶数次元の直交群においては，微妙に異なる。Catanese 予想 [Bohning, C., Derived categories of coherent sheaves on rational homogeneous manifolds, Doc. Math. 11 (2006), 261-331]に関しては，われわれの sheaves の方がその解決になっている。

Henning H. Andersen との共著論文①では，G_2 型の flag variety 上の line bundle の cohomology groups の様子を正標数 p で調べ，対応する B-character が lowest p^2-alcoves にあるとき cohomology vanishing を完全に決定した。また，対応する 6 と素な 1 の冪根における量子群では，すべての character について，vanishing behaviour を解明した。正標数では，Bott との定理は成立せず，この仕事の前には，[Andersen, H. H.,On the structure of the cohomology of line bundles on G/B, J. Algebra 71 (1) (1981) 245-258]による A_2 型と B_2 型でしか詳細は知られて居なかった。この結果は，一般の場合に何が起こっているかを示唆するものとして，今後の研究の助けになるものと期待される.

Michel Gros との共著論文⑥では，先に[M. Gros and Kaneda, M., Contraction par Frobenius de G-modules, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 61 (2011), 2507-2542]で構成した，正標数の reductive group G 上の Frobeniusmorphism が，その algebra of distributions Dist(G)上では，splitting をもつという事実を，対応する 1 の冪根での量子群でも成立することを示した。[Lusztig, G., Modular representations and quantum groups, in Classical Groups and Related Topics (Beijing, 1987), Contemp. Math. 82, pp. 59-77, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989]が導入した量子群版の Frobenius が split する。この研究により，modular の場合でも同様に，Dist(T_1)での 1 の直交冪等元分解が重要であることも解った。また，modular の場合には，higher Frobenius morphism の splitting の様子も解明できた。更には， G-module の Frobenius contraction は，不思議な操作であるが，元の module が good filtration を持つときは，その contraction も good filtration を持つことを，標数が十分大きく G の irreducible characters に関する Lusztig 予想がなりたつという条件の下で，示した。その場合には，[Parshall, B.J. and Scott, L.L., On p-filtrations of Weyl modules, Journal of London Math. Soc., 91-2 (2015, 127-158)により，Weyl modules が p-filtration を持つことが知られており，その結果を用いる. また，flag variety の structure sheaf O_{G/B} 上の Frobenius comorphism F^\sharp:O_{G/B}\to F_*O_{G/B}が split することは，[Mehta,V.B. and Ramanathan, A., Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties, Ann. Math. 122 (1985), 27-40]により発見され，flag variety が整数環上定義されているので，標数を問わず多くの応用を持つことが知られているが，それを G_1B-Verma module の言葉で解釈し直すと，自明な 1 次元表現から誘導される G_1B-module の socle の G_1B-Verma module への inclusion が G/B 上で層化することに対応する。そこで，その双対を考え，その G_1B-Verma からその head への quotient の層化も矢張り split することを示した。これは，④で G/P の場合に p が十分大きいという仮定の下で，拡張した。

②では，どういう 2 つの Weyl module 間にに G-linear homomorphism があるかという [Koppine, M., Homomorphisms between neighbouring Weyl Modules, J. Alg 103 (1986), 302-319] の結果を，対応する G_1T-Verma modules 間ではどうなるかを調べたもので，同様な結果が成立することを示した。

[Samokhin, A.: On the D-affinity of flag varieties in positive characteristic. J. Alg. **324**, (2010), 1435-1446]は，G/B の構造層の Frobenius direct image を G/P のそれに関連づける完全列を使って，B_2 型の G/B の D-affinity を示した. ここで，P は G の minimal parabolic subgroup。 ③では，彼の証明の鍵となる完全列を，G_nB の表現論を用いて導いた。G_n は G の n 番目の Frobenius kernel。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 19 件）

① Gros, M. and Kaneda, M. , Un scindage du morphisme de Frobenius quantique, 査読有, Arkiv for Matematik, DOI: 10.1007/s11512-014-0205-8

② Abe, N. and Kaneda, M. , Loewy series of parabolically induced G_1T-Verma modules, 査読有, Journal of Institute of Mathematics Jussieu 14-1 (2015), 185-220

③ Furusawa, M. and Martin,K. Local root numbers, Bessel models, and a conjecture of Guo and Jacquet, 査読有, J.Number Theory 146 (2015), 150-170

④ Yagita. N,, Note on the filtrations of

the *K*-theory, 査読有, Kodai math. J. 38 (2015), 172-200
⑤ Kaneda, M. , Exceptional collections of sheaves on quadrics in positive characteristic, 査読有, Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences 8 (2014), 117-156
⑥ Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity II, 査読有, Nagoya Math. J. 214 (2014), 1-52
⑦ Furusawa, M., and Martin,K., On central critical values of the degree four L-functions for GSp(4): a simple trace formula, 査読有, Math. Z. 277 (2014), no. 1-2, 149-180
⑧ Furusawa, M. and Morimoto K.,
On special values of certain L-functions, 査読有, Amer. J. Math. 136 (2014), no. 5, 1385-1407
⑨ Kawata, S., On Auslander-Reiten components and height zero lattices for integral group rings, 査読有, Algebr. Represent. Theory 17 (2014), no. 5, 1603-1613
⑩ Hida, A. and Yagita, N., Representations of the double Burnside algebra and cohomology of the extraspecial *p*-group, 査読有, J. Alg. 409 (2014), 265-319
⑪ Yagita, N., Witt groups of algebraic groups, 査読有, Pub. RIMS 50 (2014), 113-151
⑫ Kaneda, M. , On a lemma of Samokhin, 査読有, Algebras and Representation Theory 16 (2013), 1159-1163
⑬ Tezuka, M.,and Yagita, M., Note on the cohomological invariant of Pfister forms, 査読有, Math. J. Okayama Univ. 55 (2013), 87-93
⑭ Tanisaki, T., Manin triples and differential operators on quantum groups, 査読有, Tokyo J. Math. 36 (2013) 49-83
⑮ Masaaki , F. and Morimoto, K.,
``Shalika periods on GU(2,2)",
査読有, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 4125-137
⑯ Andersen, H.H. and Kaneda, M. , Cohomology of line bundles on the flag variety for type G_2, 査読有, Journal of Pure and Applied Algebra 216 (2012), 1566-1579
⑰ Kaneda, M. , Homomorphisms between neighboring G_1T-Verma modules, 査読有, Contemporary Mathematics 565 (2012), 105-113
⑱ Tanisaki, T., D-modules and representation theory, 査読有, in: Lie Theory and Representation Theory, Surveys of Modern Mathematics,
Vol II (2012), 177-219, International Press
⑲ Tanisaki, T., Differential operators on quantized flag manifolds at roots of unity, 査読有, Advances in Mathematics 230 (2012) 2235-2294

〔学会発表〕(計７件)
① Kaneda, M., Frobenius splitting on Dist(G), Algebra Seminar, 同済大学, 中国 2011/4/26
② Kaneda, M., Geometry of the flag varieties and representation theory, Algebra Seminar, 南京大学, 中国 2011/4/27
③ Kaneda, M., Geometry of the flag variety and G_1T-Verma modules, Algebra Seminar, Melbourne 大学, Australia 2011/8/19
④ Kaneda, M., On the structure of parabolically induced G_1T-modules, 名古屋大学 (愛知県名古屋市) 2012/3/16
⑤ Kaneda, M., A Frobenius splitting on the algebra of distributions, Algebra Seminar, Universidade de Brasilia, Brazil 2012/8/21
⑥ Kaneda, M., On the Frobenius direct image of the structure sheaf of the flag variety, Algebra Seminar, Sao Paulo University, Brazil 2012/8/23
⑦ Kaneda, M., Graded G1T-parabolic induction, Algebraic Groups and Representations,Workshop:
Representations of algebraic groups, Universite de Lyon, France 2014/7/4

６．研究組織
(1)研究代表者
兼田 正治 (KANEDA MASAHARU)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：６０２０４５７５

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
谷崎 俊之 (TANISAKI TOSHIYUKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：７０１４２９１６
柳田 伸顕 (YAGITA NOBUAKI)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：２０１３０７６８
手塚 康誠 (TEZUKA MICHISHIGE)
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：２０１９７７８４
古澤 昌秋 (FURUSAWA MASAAKI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０２９４５２５
橋本 義武 (HASHIMOTO YOSHITAKE)
東京都市大学・知識工学部・教授
研究者番号：２０２７１１８２

河田　成人（KAWATA SHIGETO）
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：５０１９５１０３