様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：３２２０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４００２４

研究課題名（和文）対称群のキリン複体のホモトピー性質に関する研究

研究課題名（英文）On the homotopy properties of the Quillen complex of a symmetric group

研究代表者
藤田　亮介（Fujita, Ryousuke）

獨協医科大学・医学部・講師

研究者番号：９０２７０３１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：一般の有限群から構成されるキリン複体のホモトピーに関する諸性質をトポロジー的観点から調べ、詳しい情報を得ることができた。その過程で、5次以上の対称群とその部分群の場合には、互いに同変ホモトピー同値になるとの知見を得た。さらに有限位相空間論と関連付けることにより、新たな同変理論の創出に貢献することができた。

研究成果の概要（英文）：I obtained some new informations on homotopy properties of the Quillen complex of a genereal finite group, of course, including a symmetric group, from a topological point of view. As a result, it follows that the Quillen complex of a symmetric group is equivariant homotopy equivalent to the Quillen complex of its alternative group whose dimension is more than five. Besides, I contributed to create a new equivariant theory by finding the relation to the finite topological space theory.

研究分野：変換群論

キーワード：キリン複体　部分群複体　順序複体　ホモトピー性質　有限位相空間

１．研究開始当初の背景

有限群の部分群族に包含で順序を入れ、この順序集合からできる順序複体をもとの群の部分群複体という。部分群複体という概念は、1970 年代に K.S.Brown がブラウン複体と呼ばれる部分群複体に関するホモロジカルなシローの定理を発見したことに起因する。部分群複体として、本研究では有限群の非自明な基本アーベル p-部分群からできるキリン複体を取り上げる。ここでｐは有限群の１つの素因数である。キリン複体のホモトピー論の研究は、有限群論の立場から創出されたものであったが、そのホモトピー構造解析の研究に海外の組合せ論研究者が精力的に取り組んできた。彼らの手法は、部分群複体を抽象化した一般の順序複体を考えて、そこでトポロジーを展開するものであり、特に可縮に関する種々の定理が発見された。その後、Francesco は有限可解群のキリン複体は球面の wedge 和にホモトピー同値になることを証明した。対称群のキリン複体のホモトピー同値性の研究については Ksontini による結果が知られている。それによれば、比較的大きな次数の対称群ではそのキリン複体は単連結になることが分かる。Ksontini のアイデアはハイパーグラフ・マッチング複体と p-cycle 複体に着眼するところにある(ある条件の下で、これらの複体とキリン複体とはホモトピー同値である)。さらに、Shareshian は p が 5 以上の素数のときに 3p 次対称群のｐでのキリン複体のホモトピー型を決定した。本研究はこれまでの研究成果を包括発展させるものである。2009 年 8 月、私はどのような有限群に対しても、キリン複体は球面と同変ホモトピー同値にはなり得ないことを発見した。さらに複雑なホモトピーの諸性質については解明できない状況が続いており、今までにない斬新な研究法が求められている。

２．研究の目的

本研究では、有限群から定義されるキリン複体とよばれる部分群複体に関するホモトピー性質を解明することにより、有限群をホモトピーという視点から特徴付けることが目的である。特に本研究では有限群として対称群を対象にする。対称群のキリン複体のホモロジー群や基本群を求めることにより、そのホモトピー的性質の解明を行う。また計算に重大な困難が伴う際には、有限位相空間からのアプローチも取り入れながら研究を進める。その際に有限群作用をもつ有限T_0空間からできる同変順序複体は作用群のキリン複体に一致することに注目する。さらに有限位相空間に関する一般論を用いて、キリン複体の新たなホモトピー性質の解明を行う。上述の通り、本研究はトポロジーの基本性質である「ホモトピー同値性」がキーワードであり、"ホモトピー"という視点から有限群を特徴付けることを最終目標にする。有限可解群に対する Francesco の研究と本研究は一体のものとして位置づけ、その研究をさらに進めるところに最大の特色があり、Shareshian らの先行研究を発展させるものである。5 次以上の対称群の場合には、非可解群の場合を取り扱うことになるゆえに、非常に重要である。26 個の散在群の特徴付けに少なからず寄与するものと期待される。また、幾何学的な概念から代数的なものを見るという視点は、幾何学的実現問題の逆問題を取り扱うことになり、その意味でもユニークで斬新であるといえるだろう。従来、有限群論の中で様々な構造定理や分類定理が発見されているわけであるが、抽象複体を通じて図形化することにより、トポロジー的な議論が可能になる。その観点から有限群を再認識することは、それ自身のみならず、今後の応用上の観点からも極めて重要であると言える。また「部分群複体」を研究対象にする研究者は国内ではほぼ皆無であり、殆どが国外の組合せ論、有限群論研究者である。本研究により、国内の関係分野の研究者を刺激し、順序複体および有限群論研究が格段に発展するのではないかと期待される。

３．研究の方法

本研究の性格上、先行研究を基に具体例を再検証しながら、まずその計算や描写を試みる。それを通じてより一般化された定理を獲得するスタイルを取る。さらに、関連する多くの文献を参考にして問題の本質を探っていく方法を取る。この過程で、必要に応じて各方面の専門家とのディスカッションを交えながら、またその協力を得ながら研究を遂行していくものである。具体的には Ksoniti および Shareshian の方法を改良しながら、その延長上でのホモトピー論を打ち建てることにより、諸性質の解明に迫る。ハイパーグラフ・マッチング複体、ｐ-cycle 複体のホモロジー群の計算を行うことにより、「Whitehead の定理」がどのような条件の下で適用できるかという観点から検証する。さらに有限位相空間の観点からの考察を行っていく。

（１） Ksoniti, Shareshian の論文検証
Ksoniti および Shareshian の論文を基に、具体的にホモロジー群の計算システムを構築していく。その際にキーとなるのはハイパーグラフ・マッチング複体, p-cycle 複体とよばれる 2 つの抽象複体であり、それぞれの性質や相互関係に注目して詳細な分析を行う。

（２） キリン複体のホモロジーの計算
対称群のキリン複体のホモロジー群の計算システムの研究を進める。

（３） Whitehead の定理の適用
代数的トポロジーでホモトピー型を決定

する際に鍵になる「Whiteheadの定理」がどのような条件の下で適用できるかという観点から検証を進める。

（4） 有限位相空間論からのアプローチ
有限群作用をもつ有限T_0空間からできる同変順序複体は作用群のキリン複体に一致することに注目して、一般論からの考察を試みる。

なお、研究遂行は研究代表者である私が、研究進捗状況を随時把握するために研究協力者らと定期的なディスカッションを交えながら進める。具体的には２ヶ月に一度の割合で、でき得る限りセミナーを開催する。また、大阪大学でほぼ毎月一度の割合で行われている変換群論セミナーで途中経過の報告を行う。さらに研究成果をシンポジウム等での口頭発表あるいは専門誌への論文発表の形で公表する。

４．研究成果

対称群のキリン複体のホモトピー構造を解明する上で、ハイパーグラフ・マッチング複体およびp-cycle複体のホモトピー構造を知ることは重要である。ハイパーグラフ・マッチング複体とは(集合としては)サイズが 1 または p である[n](= n 以下の自然数の集合)の全ての分割集合に、細分で順序を定義したface posetである。p-cycle複体とはp-巡回群によって生成された非自明な基本アーベルp-部分群からなる順序複体である。既知の事実「ハイパーグラフ・マッチング複体が連結であれば、p-cycle 複体はあるハイパーグラフ・マッチング複体のサスペンジョンのいくつかの wedge 和にホモトピー同値になる」ことを使って、ハイパーグラフ・マッチング複体の構造が把握できれば、おのずとホモロジー群(あるいは基本群)の計算に行き着くはずである。このような観点から、対称群のキリン複体のホモロジー群の計算システムの研究を進めた結果、最終的に5次以上の対称群とその交代群は同変ホモトピー同値であるという結果を得た。

さらに、ホモトピー型を決定すべく、考察を進めたが、一般化された「ホモトピー構造定理」までは得ることはできなかった。具体的には、Welker の「subgroup lattice に関する同変ホモトピー構造定理」を踏まえ、いくつかの球面のwedge和に同変ホモトピー同値になるのではないかと予想し、イソトロピー部分群に対する同変ホモトピー同値を作り、Induction ファンクターを使って同変的に拡張するという変換群論的手法からのアプローチを推し進めた。

一方、有限位相空間論からのアプローチを試みた結果、キリン予想を解くために考察を進める過程で、同変有限T_0空間論における代数化問題の重要性に気付いた。この点については研究協力者である河野進氏の尽力は極めて大きい。具体的に我々が問題にしたのは以下の 2 つである：

（1） 同変有限T_0空間からできる同変順序複体は同変 CW 構造をもつか？

（2） その同変順序複体の軌道空間上でも McCord の定理が成り立つか？

これらの問題に対する肯定的な解答を得ることができた。さらに同変有限T_0空間のカテゴリーと同変有限複体のカテゴリーの間の有効なファンクタ―を見出すことができた。

これらの研究結果について、研究セミナー、研究集会等で講演し、多くの聴講者から好評を得た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① <u>Ryousuke Fujita</u>, Susumu Kono, Some aspects of a finite T_0-space, RIMS Kokyuroku, 査読無, 1876, 89-100, 2014
② <u>Ryousuke Fujita</u>, Susumu Kono, On the finite space with a finite group action, 第 30 回代数的組合せ論シンポジウム報告集、査読無,16-29, 2013
③ <u>Ryousuke Fujita</u>, On the Euler characteristic of a finite T_0-space, Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有,74,87-103, 2013

〔学会発表〕（計　7　件）

① <u>藤田亮介</u>、On the finite space with a finite group action、RIMS 研究集会「新しい変換群論の幾何」、京都大学数理解析研究所、2015 年 5 月 27 日
② <u>藤田亮介</u>、Quillen 複体のトポロジー、変換群論セミナ―、大阪大学、2014 年 6 月 28 日
③ <u>藤田亮介</u>、河野進、On the finite space with a finite group action、第 30 回代数的組合せ論シンポジウム、静岡大学、2013 年 6 月 24 日
④ <u>藤田亮介</u>、河野進、Some aspects of a finite T_0-space、RIMS 研究集会「変換群のトポロジーとその周辺」、京都大学数理解析研究所、2013 年 5 月 29 日
⑤ <u>藤田亮介</u>、有限位相空間について、変換群論セミナ―、大阪大学、2013 年 5 月 18 日
⑥ <u>藤田亮介</u>、Burnside 環と有限位相空間について、数学セミナ―、山形大学、2012 年 11 月 21 日

⑦ 藤田亮介、Quillen 複体の可縮性、変換群論セミナー、大阪大学、2011 年 12 月 17 日

６．研究組織

(1)研究代表者

藤田　亮介（FUJITA, Ryousuke）
獨協医科大学・医学部・講師
研究者番号：90270313

(2)研究協力者

澤辺　正人（SAWABE, Masato）
千葉大学・教育学部・准教授

小田　文仁（ODA, Fumihito）
近畿大学・理工学部・准教授

河野　進（KONO, Susumu）
大阪大学・理学研究科・研究生