

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 21 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540026

研究課題名(和文) 岩堀ヘッケ環および鏡映群の表現論

研究課題名(英文) Representation theory of Iwahori-Hecke algebras and reflection groups

研究代表者

五味 靖 (Gomi, Yasushi)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：50276515

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：通常の高スと和の拡張として有限コクセター群上に定義される高スと和の $q$ 類似について研究した。その結果、A型岩堀ヘッケ環上の高スと和の定義を与え、その値を決定した。さらに、この高スと和に対応する岩堀ヘッケ環上のトレース関数がマルコフトレースと深く関係することを発見し、この関数の値を決定した。また、コクセター群(鏡映群)の拡張であるストリングC群の分類について研究を行った。特に2群に絞って研究し、ランクが3の場合においては、すべての2群であるストリングC群は位数が半分のストリングC群から中心拡大によって構成されることを証明した。これによって、位数が1024の場合のストリングC群の分類を決定した。

研究成果の概要(英文)：I studied  $q$ -analogues of Gauss sums on finite Coxeter groups which are generalization of classical Gauss sums. Then I gave the definition of Gauss sums on the Iwahori-Hecke algebras of type A and determined the values. Furthermore, I found that the corresponding trace functions on Iwahori-Hecke algebras are closely related to the Markov trace, and determined the values of the trace functions. In addition, I studied the classification of string C-groups which are generalization of Coxeter groups. I focused into 2-groups, and I proved that in case of rank 3, all string C-groups are obtained as central extensions of string C-groups by 2. Using this theorem, I determined all string C-groups of order 1024.

研究分野：代数学

キーワード：岩堀ヘッケ環 マルコフトレース 鏡映群 ガウス和 ストリングC群

### 1. 研究開始当初の背景

- (1) 岩堀ヘッケ環は様々な数学的対象との結びつきを持ち、興味深い。Jones は A 型岩堀ヘッケ環上のマルコフトレースを結び目の不変量に応用した。また、Geck-Lambropoulou は B 型岩堀ヘッケ環上にマルコフトレースを構成し、それをソリッドトラス内の結び目の不変量に応用した。五味は他の型すべてに対して代数的にマルコフトレースを構成した。その後、Webster-Williamson はマルコフトレースを幾何的な特徴付けによって再構成した。
- (2) 数論で扱われる通常のガウス和を拡張して、近藤武は有限体上の一般線型群に対してガウス和を構成し、その値を決定した。その後、斉藤・篠田や Kim などによっていくつかの有限簡約代数群に対してガウス和が構成されている。それらの先行研究を踏まえ、五味・前田・篠田は一般の有限群に対してガウス和を定義した。さらにすべての有限コクセター群および  $C(m, p, n)$  と呼ばれる複素鏡映群に対して、その値を決定した。

### 2. 研究の目的

- (1) A 型および B 型のマルコフトレースは結び目の不変量といったトポロジーへの応用があったが、他の型についてはそのような応用があるかどうかかわかっていない。マルコフトレースの代数的および幾何的な性質を調べることで、同様の応用を見つけていくことができないか研究していく。また、マルコフトレースがまだ構成されていない巡回ヘッケ環に対しても、マルコフトレースが構成できないか研究を進める。
- (2) 一般の有限群に対してガウス和が定義されたが、それが持つ性質や特徴などが解明されているとは言い難い。様々な有限群に対してガウス和を構成し、さらにその値の決定をすることで、それらの性質や特徴を解明していく。また、通常のガウス和が持つ性質や特徴を有限群上のガウス和がどの程度引き継いでいるか調べ、共通点や類似点を明らかにしていく。また有限コクセター群上のガウス和の  $q$  類似として、岩堀ヘッケ環上のガウス和を構成し、さらにその値の決定や、その特徴について研究を進める。

### 3. 研究の方法

- (1) マルコフトレースについては生成元に依存しない形で代数的な特徴付けを与えられないか研究した。

- (2) ガウス和の  $q$  類似については、有限コクセター群上のガウス和の特徴を見極め、その  $q$  類似がどうあるべきかを考えることで、岩堀ヘッケ環上に構成しようと研究を進めた。
- (3) 手計算が重要であることに疑いの余地はないが、手計算では手に負えないような計算には GAP や MAPLE といった数式処理ソフトを有効に活用して計算を行った。数多くの計算を行うことによって例を増やし、理論の構築に役立てた。
- (4) 研究分担者や研究協力者とセミナーを行い、研究を推し進めた。海外にいた研究協力者とは、数回来日してもらってセミナーを行ったほか、オンラインによってセミナーを行うなどして、密接に研究打ち合わせを行った。

### 4. 研究成果

- (1) A 型岩堀ヘッケ環上のガウス和の定義を与え、その値を決定した。さらに、このガウス和に対応する岩堀ヘッケ環上のトレース関数がマルコフトレースと深く関係することを発見し、この関数の値を決定することに成功した。この結果を得る上で、篠田とは密接に研究打ち合わせを行い、その中で多くの有益なアドバイスを得た。
- (2) 研究の視野を広めるべく、コクセター群（鏡映群）の拡張であるストリング C 群の分類について研究を行った。特に 2 群に絞って研究し、ランクが 3 の場合においては、すべての 2 群であるストリング C 群は位数が半分のストリング C 群から中心拡大によって構成されることを証明した。これによって、位数が 1024 の場合のストリング C 群の分類を決定することに成功した。この研究は、アテネオ・デ・マニラ大学の Ma. Louise Antonette N. De Las Penas 氏および Mark L. Loyola 氏と共同で行い、研究結果を得るに至った。また、セミナーには篠田も参加し、そこでの様々なアドバイスが結果に結びついた。
- (3) 中島は量子群の表現論、特に結晶基底について研究を行い、多面体表示などで研究結果を出した。
- (4) 篠田は有限代数群上のガウス和について研究するとともに、上記 (1), (2) の研究成果において、有益なサポートを行った。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Y. Gomi, Gauss sums on the Iwahori-Hecke algebras of type A, to appear in Tokyo Journal of Mathematics, 査読有
- ② Y. Kanakubo and T. Nakashima, Explicit forms of cluster variables on double Bruhat cells  $G^{\{u, e\}}$  of type C, to appear in Tokyo Journal of Mathematics, 査読有
- ③ Y. Kanakubo and T. Nakashima, Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type  $(u, e)$  and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A, SIGMA (Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.), Vol. 11, 2015, 033, 32 pages. 査読有
- ④ T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals and Polyhedral Realizations of type  $D_n$ , Contemporary Mathematics, Vol. 623, 2014, 227--242. 査読有
- ⑤ T. Nakashima, Decorations on Geometric Crystals and Monomial Realizations of Crystal Bases for Classical Groups, Journal of Algebra, Vol. 399, 1, Feb. (2014), 712-769. 査読有
- ⑥ K. C. Misra and T. Nakashima,  $A_n^{(1)}$ -Geometric Crystal corresponding to Dynkin index  $i=2$  and its ultra-discretization, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 40, 2013, 297--318. 査読有
- ⑦ T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals, Polyhedral and Monomial Realizations of Crystal Bases, Contemporary Mathematics Vol. 602, 2013, 143--163. 査読有
- ⑧ T. Nakashima and M. Shimojo, RSK-type correspondence of Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Tokyo J. Mathematics, Vol. 36, 2013, 113-130. 査読有
- ⑨ Y. Gomi, T. Maeda and K. Shinoda, Gauss sums on finite groups, Tokyo Journal of Mathematics, Vol. 35, 2012, 165--179. 査読有

- ⑩ M. Igarashi, K. C. Misra and T. Nakashima, Ultra-discretization of the  $D^{(3)}_4$ -Geometric Crystals to the  $G^{(1)}_2$ -Perfect Crystals, Pacific Journal of Mathematics Vol. 255, No. 1, 2012, 117--142. 査読有
- ⑪ T. Nakashima and M. Shimojo, Admissible Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Communications in Algebra, Vol. 39, 2011, no 10, 3849--3865. 査読有
- ⑫ T. Nakashima and M. Shimojo, Pictures and Littlewood-Richardson Crystals, Tokyo Journal of Mathematics, Vol. 34, 2011, 493--506. 査読有
- ⑬ M. Igarashi and T. Nakashima, Geometric Crystals on Flag varieties and Unipotent Subgroups of Classical Groups, Journal of Geometry and Physics, Vol. 61, Issue 11, November 2011, 2267--2284. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

- ① 五味 靖, Gauss sums on the Iwahori-Hecke algebras of type A, 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 筱田記念号刊行に寄せて」, 上智大学, 2016年3月22日
- ② 中島 俊樹, クラスター代数と結晶基底, 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 筱田記念号刊行に寄せて」, 上智大学, 2016年3月21日
- ③ Y. Gomi, Determination of string C-Groups of order 1024, Discrete Mathematics and Applications, Institute of Mathematics, University of the Philippines Diliman, Philippines, Jan. 9, 2016
- ④ T. Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases, 8th South Eastern Lie Theory Workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory, Discussion Sessions, North Carolina State University, USA, Oct. 10, 2015.
- ⑤ T. Nakashima, Affine Geometric Crystals and Limit of KR Perfect Crystals of  $A^{(1)}_n$ , 8th South Eastern Lie Theory Workshop on Algebraic and Combinatorial Representation Theory, North Carolina State University, USA, Oct. 9, 2015

- ⑥ T. Nakashima, Crystal Bases and Upper Cluster Algebras on Double Bruhat Cells, Conference on Cluster Algebras and Representation Theory, CMC Thematic Program on Cluster Algebras in Mathematics and Physics, KIAS, Seoul, Korea, Nov, 6, 2014.
- ⑦ T. Nakashima, Upper Cluster Algebras on Double Bruhat Cells and Monomial Realizations of Crystal Bases, ICM satellite Conference on Representation Theory and Related Topics, Daegu, Korea, Aug.6, 2014.
- ⑧ T. Nakashima, Cluster Variables on Double Bruhat cells and Monomial Realizations of Crystal Bases, New Directions in Lie Theory, Combinatorial Representation Theory, University of Montreal, CRM, Canada, Apr.21, 2014
- ⑨ Y. Gomi,  $q$ -analogue of Gauss sums on the symmetric groups, The 55th KPPY Combinatorics Seminar, Yeungnam University, Korea, Mar. 23, 2013
- ⑩ K. Shinoda, Gauss sums on finite reductive groups and character sums, The 55th KPPY Combinatorics Seminar, Yeungnam University, Korea, Mar. 23, 2013
- ⑪ T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals and Monomial Realizations of Crystals, American Mathematical Society Fall Southeastern Section Meeting, Special Session on Geometric and Algebraic Aspects of Representation Theory, Tulane University, New Orleans, USA, Oct.13, 2012.
- ⑫ 五味 靖, 対称群上の Gauss 和の  $q$  類似, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 九州大学, 2012 年 9 月 19 日
- ⑬ T. Nakashima, Monomial realizations of crystal bases and elementary characters, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretic Methods in Physics, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, China, Aug.23, 2012.
- ⑭ T. Nakashima, Elementary characters and monomial realizations of crystal bases, Algebraic and Combinatorial approaches to representation,

Department of Mathematics, University of California Riverside, USA, May 18-20, 2012.

- ⑮ K. Shinoda, Gauss sums on finite groups and Hecke algebras, Conference on Representation Theory of Chevalley Groups and Related Topics, Nagoya University, Mar. 12, 2012
- ⑯ T. Nakashima, Elementary Characters and Monomial Realizations of Crystal Bases, Infinite Analysis 11 Winter School, Quantum cluster algebras and related topics, Osaka University, Dec. 20-23, 2011.
- ⑰ T. Nakashima, Decorated Geometric Crystals, Elementary Characters and Monomial Realizations of Crystal Bases, Symmetries, Integrable Systems and Representations, Universite Lyon1, France, Dec.13-16, 2011.
- ⑱ K. Shinoda, Characters of endomorphism algebras of Gelfand-Graev representations, Shanghai workshop on representation theory, East China Normal Univ. China, Dec.10, 2011

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

五味 靖 (GOMI, Yasushi)  
上智大学・理工学部・准教授  
研究者番号 : 50276515

### (2) 研究分担者

中島 俊樹 (NAKASHIMA, Toshiki)  
上智大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 60243193

筱田 健一 (SHINODA, Ken-ichi)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号 : 20053712

### (3) 研究協力者

Ma. Louise Antonette N. De Las Penas  
(Ateneo de Manila University)

Mark L. Loyola (Ateneo de Manila University)