

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540029

研究課題名(和文)生成多項式の実用化による代数体の数論の研究

研究課題名(英文) Research on arithmetic of algebraic number fields by practical use of generic polynomials

研究代表者

小松 亨 (Komatsu, Toru)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：10403974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、ある惰性特質をもつ代数体が存在しないためのガロアタイプに関する十分条件を発見した。9次以下のガロアタイプは合計121種あり、十分条件を58種がみたし63種がみたさないことを示した。さらに後者の63種に対して上記の特質をもつ代数体が存在することを示した。存在証明は、数表や計算機ソフトの活用により具体例を挙げることで行った。また他にも本研究の基礎の一つとなっている論文の部分的な拡張が得られた。虚2次体の組におけるある条件をみたすイデアル類の存在を具体的構成法により証明できた。

研究成果の概要(英文)：In this research we give a sufficient condition on the Galois type for the non-existence of a number field which has a certain inertia property. The number of Galois types up to degree nine is 121, the sufficient condition holds for 58 types, not for 63 types. For the latter 63 types we concretely demonstrate the existence of such number fields by using tables and computer softwares. In addition we generalize a result which is one of bases for this research. We show the existences of ideals with a certain condition in imaginary quadratic fields.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：アルゴリズム 代数学

1. 研究開始当初の背景

生成多項式はパラメータ付きの代数方程式であり、近年その構成法に関する様々な理論が考案され実例が得られている。日本国内では早稲田大学の橋本喜一朗氏、三宅克哉氏、上智大学の角皆宏氏、立教大学の星明考氏(現新潟大学)、電気通信大学の木田雅成氏(現東京理科大学)、陸名雄一氏などが生成多項式に関する研究を行っている。国外では研究者が点在しているが特に台湾に中規模な研究グループがある。生成多項式を具体的に構成する際に用いる手法としては主に代数的な不変式論や代数幾何的な曲面論などが多い一方で、生成多項式の非存在性を証明する方法として整数論が用いられる点が大変興味深い。生成多項式の数論における研究代表者の研究成果として、陸名の巡回的生成多項式に関する数論的性質の分析(2004年)、シャンクスの最単3次多項式の実用化(2007年)などがある。2009年に研究代表者は有理数体上の素数次巡回群のための生成多項式に関する数論的性質の分析を行った。分析では、ある代数群を定義することにより古典的クンマー理論を自然に含む形で一般化した。古典的クンマー理論についてはいわゆるヒルベルトの第9問題とよばれる一般相互法則が定理として知られている。2009年の研究成果により一般化された一般相互法則が得られた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、生成多項式と呼ばれる代数方程式の実用化を推し進めることにより代数体の拡大における分岐性および存在性に関する数論を研究することである。本研究ではまず、まだ数論的性質が解明されていない生成多項式について研究する。つぎに、その数論的性質を活用して代数体の数論を分析する。具体的な生成多項式としてはブルーマー型の5次多項式である。また生成多項式の数論的性質に関する研究をふまえて、自らも新たな生成多項式の構成にも挑戦する。

3. 研究の方法

1年目は、既に構成されている生成多項式に関してその数論的性質を理論的および実験的に研究する。具体的に扱う生成多項式はブルーマー型の5次多項式である。まず、ブルーマー型の5次多項式が構成された方法までさかのぼり超楕円曲線の被覆から分析を行う。特にパラメータのもっている幾何的な性質が代数的あるいは数論的な現象としてどのように反映されているかを理論的かつ計算機実験的に分析する。また、被覆理論へさかのぼる際に視野を広げて他の曲線や曲面の被覆に関して類似物を考える。それらの現象を比較することによってブルーマー型の5次多項式がもつ特性を分析する。ただしこのような類似物は次数の高い多項式でありかつその係数も大きいことが予測される

ため、多くの部分を計算機実験に依存することになる。

2年目は、多項式の不変量の1つである多項式判別式を分析する。多項式判別式は数論的な判別式と密接に関わりあうことがよく知られている。特に多項式判別式に現れる因子の幾何的な性質、例えば特異点のような性質を観察することにより数論的性質の分岐性への影響を考察する。また、多項式判別式の研究をふまえていわゆる特異点解消のような方法でパラメータを変形したのち分析してみる。ただしその場合に定義体が拡大する可能性がある。もしも定義体が拡大した場合にはその拡大によって生じた複雑性あるいは退化性をコホモロジー理論などにより把握する。

3年目は、ブルーマー型の5次多項式に関する問題が解決されたあとは他の生成多項式の数論的性質を研究する。もしもブルーマー型の5次多項式に関する研究が当初計画どおりに進まない時には、他の生成多項式に切り換えて同様の研究を行なう。またこれらの研究について得られた結果をまとめ査読論文を完成させるとともに、成果の発表講演を国内外で行う。研究実施期間を通して、効率的に研究を進めるために比較的近い東京都内などの研究者と積極的に交流し、お互いの研究を支援しあう。

4. 研究成果

本研究の主要な目的の1つは代数体の拡大における分岐および存在性に関する数論の研究である。

2011年度では、分岐条件ではなく惰性条件に関連する研究成果が得られた。代数体の拡大において分岐、惰性、分解という3種類の状態があり、分岐は体判別式と係わる重要な性質である。一方、惰性は比較的目立たない性質であり、そのため研究計画の時点で今回のような成果を想定しておらず、その観点からも意義のある研究を行うことができた。実際の研究では、当初の研究対象であるブルーマー型の5次多項式を含む生成多項式の一般論を研究した際、惰性条件と生成多項式の間で起こるある現象に気づき、その現象を計算機実験により観測した。その実験データを分析することで今回解明した規則性を予測し、最終的にその規則性を証明した。具体的には代数体の様々なガロアタイプの中で、ある惰性条件をみたす代数体が存在しないタイプの特徴を発見し、その特徴をもつ9次以下のガロアタイプが58種存在することを示した。一方その特徴をもたないガロアタイプは63種あり、計算機実験や既存の数表を利用することで63種すべてに対して代数体の実例を発見した。これにより9次以下のガロアタイプ合計121種について惰性条件をみたす代数体の存在、非存在が今回の研究成果で決定された。また本研究の目的の1つとしている生成多項式の実用化に関し

ても研究成果が得られた。4次以下のガロアタイプについて惰性条件をみたす代数体が1つ存在するとき、そのガロアタイプの生成多項式を利用することで同様な代数体の無限族を構成した。

2012年度では、前年度に引き続き分岐条件ではなく惰性条件に関連する研究成果が得られた。前年度に、ある惰性条件をみたす代数体が存在しないガロアタイプの特徴を発見し、9次以下のガロアタイプ合計121種について惰性条件をみたす代数体の存在、非存在を決定した。当該年度では、10次と11次のガロアタイプそれぞれ45種と8種について同様の方法で研究を行い、10次22種については代数体の非存在が確定された。残りのうち10次16種と11次6種については計算機実験や既存の数表を利用することで代数体の存在を実例により決定できた。しかしながらなお残っている10次7種と11次2種については存在、非存在がまだ確定できていない。これまで利用してきた非存在の特徴について、残りのタイプでは持たないことを確認できているが、既存の数表が少ないことや計算機実験で膨大な時間がかかるため実例の発見に至っていない。これにより現在の方法による計算機実験および数表利用の限界が分かり、新しい方法を模索中である。11次2種についてはガロアタイプが比較的易しいため、存在を予測させる既存の理論があり、それに基づいて代数体の実例構成を研究中である。一方、10次7種についてはガロアタイプが複雑であるため存在あるいは非存在をサポートする理論はまだ見つかっておらず今後の課題である。

2013年度では、事業期間初年度から引き続き惰性条件に関連する研究成果が得られた。ある惰性条件をみたす代数体の存在、非存在について、初年度に9次以下すべての121種を、前年度に10次38種および11次6種を解決したが、まだ10次7種および11次2種が確定できていなかった。当該年度では、10次7種のうちある1種についてガロアタイプの群論的分析によりある条件をみたす2次体と5次体の存在に問題を還元し、10次代数体の存在を実例の構成により決定できた。前年度までは既存の数表を利用する方法で考察してきたがその数表利用の限界に達したため、当該年度のような群論的分析により問題を還元するとともに計算機実験の可能な不変量を発見することが今後の研究課題である。

また最終年度では上記結果の他に、2002年度に出版され本研究の基礎の一つとなっている論文について、その主結果の部分的な拡張が得られた。虚2次体の組の無限族におけるある条件をみたすイデアル類の存在を具体的構成法により証明できた。これにより虚2次体の組の無限族におけるある条件をみたす不分岐拡大の存在性が示された。今回の構成のために用いた既存の定理は実2次

体に対しても知られているが複雑で実用困難のため、既存定理の改良あるいは生成多項式の実用化による考察が今後の研究課題である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計0件)

[学会発表] (計7件)

- ① 小松 亨、類数がともに n で割り切れる虚2次体 $Q(\sqrt{D})$, $Q(\sqrt{mD})$ について、北陸数論セミナー、2013年11月21日、金沢大学サテライトプラザ (石川県)
- ② 小松 亨、代数体の惰性条件によるガロア群の制限について、愛知数論セミナー、2013年06月15日、愛知工業大学本山キャンパス (愛知県)
- ③ 小松 亨、On the existence of number fields with certain prime conditions、Hawaii Conference in Algebraic Number Theory, Arithmetic Geometry and Modular Forms、2012年03月07日、ハワイ大学マノア校 (アメリカ)
- ④ 小松 亨、On inverse Galois problem with certain prime conditions、AMS Sectional Meeting AMS Special Session, 2012 Spring Western Section Meeting、2012年03月04日、ハワイ大学マノア校 (アメリカ)
- ⑤ 小松 亨、ある惰性条件をみたす代数体のガロア閉包について、松江数論研究会、2012年01月07日、島根大学松江キャンパス (島根県)
- ⑥ 小松 亨、On the existence of a Galois field with certain decomposition conditions、早稲田整数論セミナー、2011年06月24日、早稲田大学西早稲田キャンパス (東京都)
- ⑦ 小松 亨、拡大次数の素因子が惰性する代数体とそのガロア閉包について、学習院土曜セミナー、2011年06月04日、学習院大学 (東京都)

[図書] (計1件)

- ① 小松 亨 他、朝倉書店、応用数理解ハンドブック、2013、685(360-363)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 亨 (Komatsu Toru)
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号：10403974

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし