

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 4 月 25 日現在

機関番号：32663

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540031

研究課題名(和文)量子エルゴード性の拡張

研究課題名(英文)Generalization of quantum ergodicity

研究代表者

小山 信也 (Koyama, Shin-ya)

東洋大学・理工学部・教授

研究者番号：50225596

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,400,000円

研究成果の概要(和文)：モジュラー群の合同部分群に対するアイゼンシュタイン級数の量子エルゴード性のレベル・アスペクトは、これまで有理整数環上(標数0の場合)でのみ証明されていたが、本研究ではこれを有限体上の一変数多項式環上(標数正の場合)に拡張した。

証明の鍵となるL関数の評価については、ラフォークによって2002年に証明されたリーマン予想類似と、コンリーとゴーストによって2006年に証明された定理「リーマン予想類似が成り立つゼータ関数は、セルバーグ類に属する限りにおいてリンデレーフ予想を満たす」を組み合わせることにより解決した。レベルアスペクトを考えることにより、標数正の量子エルゴード性に意味を与えた点は新しい。

研究成果の概要(英文)：Quantum ergodicity in the level aspect for Eisenstein series of congruence subgroups of the modular group was known only over the rational integer ring in case of the characteristic zero. We generalized this phenomena to the positive characteristic case over the ring of polynomials over finite fields.

A key in the proof is a nontrivial estimate of automorphic L-functions. We solved this problem by combining the results of Lafforgue and Conrey-Ghosh. Lafforgue's theorem is an analogue of the Riemann hypothesis over function fields, which he proved in 2002. On the other hand, the theorem of Conrey and Ghosh was shown in 2006, when they proved that any zeta function satisfying the analogue of the Riemann hypothesis also satisfies the Lindelof hypothesis, as long as it belongs to the Selberg class. Since the automorphic L-functions satisfy functional equations, we see that it belongs to the Selberg class, even if it is over function fields. Hence we could successfully reached the result.

研究分野：数学・整数論・ゼータ関数論

キーワード：ゼータ関数 量子エルゴード性 量子カオス 合同部分群 関数体

1. 研究開始当初の背景

- (1) 量子カオス理論において、スペクトルの増大に伴い固有関数の値分布が限りなく等分的になるという「量子エルゴード性」の概念が、モジュラー群と合同部分群のアイゼンシュタイン級数に対して、ルオとサルナックにより、1995年に証明された。
- (2) その後2000年代に、リンデンシュトラウスとサンダララジャンにより、モジュラー群のカスプ形式の量子エルゴード性が証明された。この頃から、ヒルベルト・モジュラー群など、他の群に対する後続研究も行われるようになった。
- (3) 2009年、小山により、量子エルゴード性の「レベル・アспект」が証明された。これは、従来のスペクトルの増大という概念を、より一般的に多様体の不変量(解析指標)の増大に拡張した概念である。小山が扱ったのは、1995年にルオとサルナックが扱ったモジュラー群の合同部分群の場合の別アспектであり、これ以外の群においてこのような別アспектの現象がどこまで成り立つかが注目されていた。

2. 研究の目的

- (1) 本研究の目的は、標数が正の場合、すなわち、有限体上の一変数関数体上のモジュラー群や合同部分群に対し、量子エルゴード性を拡張することであった。ルオとサルナックが扱ったモジュラー群・合同部分群の場合に量子エルゴード性の正否を突き止めることを、第一の目的とした。
- (2) 第二の目的として、リンデンシュトラウスやサンダララジャンによって示されたカスプ形式に対し、量子エルゴード性のレベル・アспектが存在するのか、もし存在するとすればどのように定式化され、証明されるのか、それらの問題を解明することを掲げた。

3. 研究の方法

- (1) 標数が正の場合、スペクトルが有界であるため、先行研究のようにスペクトルを無限大に増大させた極限を考えることが不可能である。このため、量子エルゴード性は標数が正の場合には一切考えられてこなかった。本研究では、2009年の小山の結果により、スペクトルを増大さ

せた従来のバージョンではなく、他の解析指標、特に合同部分群のレベルの増大を考察することにより、標数が正の場合への一般化を試みた。

- (2) 量子エルゴード性の証明の鍵となるのは、保型L関数の凸評価の解明である。本研究では、標数が正であることを踏まえ、保型L関数に対するリーマン予想類似がすでに証明されていることから、本質的に凸評価に相当する性質が証明可能であろうと考えた。

4. 研究成果

- (1) 保型L関数の凸評価を改良した。すなわち、臨界線上における保型L関数の絶対値を、合同部分群のレベルが無限大に増大した際の漸近評価式として、関数方程式などから得られる標準的な評価よりも精密な漸近式で上から押さえることに成功した。証明の方針は、以下のようであった。

まず、標数が正の関数体の場合において、ラフォークによって2002年に証明されたラングランズ予想を用いた。このことから、保型L関数が有理関数表示を持ち、零点の実部が $1/2$ となる性質(リーマン予想の保型L関数への類似)も示された。

次に、コンリーとゴーストによる2006年の定理「任意のセルバーグ族に属するL関数は、リーマン予想を満たせばリンデレーフ予想を満たす」に注目した。従来、標数が正のL関数に対してセルバーグ族という概念は考えられたことがなかったが、本研究では、オイラー積で定義されたL関数が関数方程式を持つという、セルバーグ族の基本的な性質を踏まえ、それを満たせば、標数が正であっても、コンリーとゴーストの定理を適用可能であることを確かめた。

以上で得た を組み合わせることにより、標数が正の関数体の場合に、保型L関数がリンデレーフ予想を満たすことを証明した。

- (2) 標数が正の場合に、モジュラー群と合同部分群のアイゼンシュタイン

級数に対し,量子エルゴード性のレベル・アスペクトを証明した.すなわち,合同部分群のレベルが無限大に(レベルは有限体上の多項式であり,その次数が無限大に)近づくに伴って,アイゼンシュタイン級数の値分布が限りなく等分布的になるという事実を証明した.証明の方針は,以下のものであった.

量子エルゴード性の定義式は,「任意のジョルダン可測集合上で,固有関数の絶対値二乗の定積分が,特定のアスペクトの極限を取った際,1の定積分に収束する」ということであるが,本研究では,まずこのジョルダン可測集合上の定積分を考える代わりに,その可測集合の特定関数の,全多様体上での定積分を考えた.これら二つの定積分は数学的に言い換えただけであり,積分値は等しい.

次に,特性関数を含んだ定積分において,特性関数をスペクトル分解し,離散スペクトルに対する固有関数であるカスプ形式の部分と,連続スペクトルに対する固有関数であるアイゼンシュタイン級数の部分に分け,各部分の漸近評価を計算した.

このうち,アイゼンシュタイン級数の部分については,古典的な計算のみで処理ができ,目的としている量子エルゴード性の成立に十分な評価を得ることができた.

残るカスプ形式の部分について,複雑な計算過程を経たのち,最終的にそのカスプ形式(マース波動形式)に対する保型L関数の凸評価の改善に,問題が帰着された.

この保型L関数の評価に関し,前項(1)で得た「凸評価の改善」を用いた.これによって,最終的に量子エルゴード性を証明することに成功した.

5. 主な発表論文等
(研究代表者,研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4件)

S. Koyama and N. Kurokawa “Triple mean values of Witten L-functions” Monatshefte für Mathematik. (2015) 1 - 14. (査読有)
DOI: 10.1007/s00605-015-0841-5

A. Deitmar, S. Koyama and N. Kurokawa “Counting and zeta functions over F_1 ” Abh. Math. Seminar Hamburg. **85** (2015) 59-71. (査読有)

S. Koyama and F. Suzuki “Euler products beyond the boundary for Selberg zeta functions” Proceedings of the Japan Academy **90A** (2014) 101-106. (査読有)

T. Kimura, S. Koyama and N. Kurokawa “Euler products beyond the boundary” Letters in Mathematical Physics **104** (2014) 1-19. (査読有)
DOI 10.1007/s11005-013-0644-3

[学会発表](計 11件)

小山 信也 「Zeta functions of super-graphs」Zeta Functions in Okinawa 2015, 2015年10月11日. 沖縄コンベンション・センター(沖縄県宜野湾市).

小山 信也 「Error terms in the prime geodesic theorem」Zeta Functions in Okinawa 2014, 2014年10月27日. 沖縄コンベンション・センター(沖縄県宜野湾市).

小山 信也 「深いリーマン予想について」第9回福岡数論研究集会 in 別府, 2014年9月2日. 立命館太平洋大学(大分県別府市)

小山 信也, 鈴木 史花 「Euler products beyond the boundary for Selberg zeta functions」国際数学者会議 (International Conference for Mathematicians), 2014年8月19日, ソウル(韓国)

小山 信也 「Euler products beyond the boundary」Number theory conference in honor of Peter Sarnak, 2014年1月8日, 山東(中国)

小山 信也, 鈴木史花 「Euler products beyond the boundary for Selberg zeta functions」Zeta Functions in Okinawa

2013, 2013年10月20日, 沖縄コンベンション・センター(沖縄県宜野湾市).

小山 信也、鈴木史花「セルバーグ・ゼータ関数の深いリーマン予想」日本数学会, 2013年9月23日, 愛媛大学(愛媛県松山市)

小山 信也「数論的量子カオスと量子エルゴード性」スペクトル理論と散乱理論, 2012年12月12日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

小山 信也、中島さち子「Equidistribution of Eisenstein series in the level aspect」Zeta Functions in Okinawa 2012, 2012年11月18日, 沖縄コンベンション・センター(沖縄県宜野湾市).

小山 信也、中島さち子「Quantum ergodicity of Eisenstein series in the level aspect」Random matrix theory for complex systems, 2012年4月17日. 沖縄科学技術大学院大学(沖縄県国領郡恩納村)

小山 信也、中島さち子「アイゼンシュタイン級数の等分布性」日本数学会 2012年3月29日, 信州大学(長野県松本市)

〔図書〕(計4件)

黒川 信重, 小山 信也, 日本評論社, 「ラマヌジャン《ゼータ関数論文集》」 2016, 1-167.

小山 信也, 共立出版「素数とゼータ関数」2015, 288.

黒川 信重, 小山 信也, PHP 研究所 「ABC予想入門」2013, 1-218.

黒川 信重, 小山 信也, サイエンス社 「リーマン予想の数理物理」 2011, 1-132.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

取得状況(計 0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.toyo.ac.jp/~koyama>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小山 信也 (KOYAMA, Shin-ya)

東洋大学・理工学部・教授

研究者番号: 50225596