

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540038

研究課題名(和文) 整凸体のミンコフスキー和とトーリック多様体の研究

研究課題名(英文) Study on Minkowski sums of lattice polytoped and toric varieties

研究代表者

尾形 庄悦(Ogata, Shoetsu)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90177113

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、非特異トーリック多様体上のアンブル直線束はすべて正規生成であろうという予想の3次元と4次元の場合の解決である。

平成23年度には、3次元でアンブル直線束の随伴束が巨大でない場合の肯定的解決の論文が出版された。また、特異点をもつ場合には、一般次元でベリールアンブルだが正規生成でないものの存在を示し、論文として出版した。さらに、射影直線への全射をもつ3次元非特異トーリック多様体上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを証明した。

平成25年度には、随伴束が巨大でないアンブル直線束をもつ3次元非特異トーリック多様体上のすべてのアンブル直線が正規生成であることを示した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to prove the conjecture that all ample line bundles on a nonsingular toric variety in dimension three and four are normally generated.

In 2011, our article which proves that an ample line bundle on a nonsingular toric 3-fold whose adjoint bundle is not big is normally generated has been printed in a scientific journal. We construct examples of very ample but not normal lattice polytopes in all dimensions greater than two. And we prove that all ample line bundles on a nonsingular toric 3-fold which has a surjective morphism onto the projective line are normally generated. In 2013, we prove that all ample line bundles on a polarized toric 3-fold which has an ample line bundle with non-big adjoint bundle are normally generated.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

1. 研究開始当初の背景

2次元トーリック多様体上のアンブル直線束はすべて正規生成であり、定義イデアルは3次以下の元で生成されることが知られていた。特に、非特異トーリック曲面の定義イデアルは2次式で生成される。このことから、Sturmfels は、一般に、非特異トーリック多様体が射影正規的に射影空間に埋め込まれているとき、その定義イデアルは、2次の元のみで生成されるであろうと予想した。

この予想の検証のために、いくつかの例を計算しようとするとき、射影正規的埋め込みの検証が大変難しい。確かめられたのは、射影空間の直性などの自明な場合のみであった。

トーリック多様体上のアンブル直線束は整凸多面体と対応し、直線束の正規生成性が多面体の正規性に対応することが知られている。

また、3次元と5次元に1つずつベリーアンブルだが正規でない凸多面体が存在することが知られていた。これらは、非特異ではない。

我々は、まず、非特異トーリック多様体上のアンブル直線束はすべて正規生成であろうと予想し、対応する整凸多面体で内部に整数点を含まないものを分類した。これにより、3次元非特異トーリック多様体上のアンブル直線束でその随伴束が巨大でない場合には、直線束が正規生成であることを示していた。

2. 研究の目的

非特異トーリック多様体上のすべてのアンブル直線束は正規生成であろうという予想の3次元と4次元の解決を目的とする。問題は、整凸多面体の研究に帰着するが、以前の研究から、3次元の場合に限っても、簡単には正規性を示すことができない。

そこで、多面体が2つの多面体のミンコフスキー和になっている場合を研究して、正規性を示し、定義イデアルの2次生成も解決することを目標とする。また、弱ファノ多様体についても正規性が示せれば、1次元上のトーリック・ファノ多様体に対しても正規性が示せると期待できる。

3. 研究の方法

多様体に何らかの構造を仮定して、特徴に応じた証明法を見つける方向で研究する。

特に、線分とのミンコフスキー和になっている多面体は、射影直線への全射をもつトーリ

ック多様体に対応するから、ファイバー束の構造をもつトーリック多様体との比較など、研究方法の手がかりがある。

さらに、3次元のベリーアンブルだが正規でない整凸多面体は、線分と3単体とのミンコフスキー和であることに注意すると、高次元での多数の例が作れそうである。

また、以前の研究で分類した、内部に整数点を含まない凸多面体に対応するトーリック多様体も特徴的であるから、この上のアンブル直線束の正規生成を研究しやすい。

4次元トーリック・ファノ多様体上のアンブル直線束について研究するために、3次元弱ファノ多様体を研究しなければならない。トーリック弱ファノ多様体は、ゴレンスタイン・ファノ多面体と密接に関係している。組み合わせ的に4次元まで分類されているが、3次元でも4千個以上も存在し、分類が我々の研究に役立つとは思われない。別の視点から、正規性を調べるべきである。

4. 研究成果

射影直線上への全射がある3次元トーリック多様体で0でのファイバーが既約な場合について、その上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを示した。具体的には、2次元多角形と線分のミンコフスキー和の場合に正規性を証明し、この形の多面体の和集合に分解する方法を見つける。この課程で、一般の場合の証明法が見つかった。これを論文にまとめて学術雑誌に投稿した。まだ掲載許可を得ていない。この結果を日本国内と海外の研究集会で発表した。

以前の研究における内部に整数点を含まない整凸多面体の分類から、随伴束が巨大でないアンブル直線束をもつ3次元偏極トーリック多様体の大まかな分類が得られたので、この種のトーリック多様体上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることを示した。この中には、トーリック・ファノ多様体が含まれる。すなわち、3次元トーリック・ファノ多様体上のすべてのアンブル直線束が正規生成であることが証明できた。これも論文にまとめて、学術雑誌に投稿し、出版された。この結果を日本国内と海外の研究集会で発表した。

また、3次元以上のすべての次元に特異点をもつトーリック多様体でベリーアンブルだが正規生成でないアンブル直線束をもつものが存在することを具体例を構成することで示した。ただし、論文にまとめたものには、誤りが見つかり、訂正を加えた。3以上の各次元にこのようなトーリック多様体が存在することは正しい。

連携研究者石田正典は、トーリック多様体の一般化であるトロイダル埋め込みの比較的簡単な応用である土橋カusp特異点の定義イデアルの計算をグレブナー基底の有効な使用方法を見つけて、正標数のカusp特異点の定義を試みている。

連携研究者原伸生は、トーリック多様体に現れる孤立特異点の特異点解消のグラフと同じグラフをもつ正標数の特異点を研究し、2次元の場合には、トーリック特異点であることを示した。これには、彼が以前から研究している正標数のF正則特異点が役立っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

(1) 尾形庄悦, Projective normality of toric 3-folds with non-big hyperplane sections, II, Far East J. Math. Sci. 84(2014), 99-110, 査読有り.

(2) 尾形庄悦, Erratum to Very ample but not normal lattice polytopes, Beitr. Algebra Geom. 54(2013), 769-780, 査読有り.

(3) 尾形庄悦, Very ample but not normal lattice polytopes, Beitr. Algebra Geom. 54(2013), 291-302, 査読有り.

(4) 尾形庄悦, Projective normality of toric 3-folds with non-big adjoint hyperplane sections, Tohoku Math. J. 64(2012), 125-140, 査読有り.

(5) 原伸生, F-blowups of F-regular surface singularities, Proc. Amer. Math. Soc. 140(2012), 2215-2216, 査読有り.

[学会発表](計 17 件)

(1) 石田正典, カusp特異点を記述する形式扇の導入, 杜の都代数幾何学研究集会, 東北大, 2014年1月10日

(2) 尾形庄悦, "Normality of a certain class of lattice polytopes", 36ACCMCC: Australian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 西オーストラリア大(オーストラリア), 2013年12月10日

(3) 石田正典, カusp特異点とグレブナー基底, 第11回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大, 2013年3月4日

(4) 尾形庄悦, ある種の3次元トーリック多様体の定義イデアルについて, 杜の都代数幾何学研究集会, 東北大, 2013年2月15日

(5) 石田正典, カusp特異点を定義する扇について, 杜の都代数幾何学研究集会, 東北大, 2013年2月14日

(6) 原伸生, フロベニウス直像とF爆発に関する幾つかの問題, 杜の都代数幾何学研究集会, 東北大, 2013年2月14日

(7) 尾形庄悦, "Projective normality of toric fibered varieties", 第二回若手代数複素幾何研究集会, 佐賀大, 2012年12月19日

(8) 石田正典, 可換環としてのトーリック型カusp特異点, 代数幾何学城崎シンポジウム, 城崎大会議館(兵庫県豊岡市城崎町), 2012年10月24日

(9) 尾形庄悦, "Projective normality of toric varieties", 『特異点と多様体の幾何学』, 山形大, 2012年8月24日

(10) 尾形庄悦, "Projective normality of toric fibered 3-folds", Hyperplane arrangements in Pyrenees, ポー大(フランス), 2012年6月14日

(11) 原伸生, "Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities", 高次元代数幾何の周辺, 京都数研, 2012年6月12日

(12) 石田正典, "Groebnar basis for cusp singularities of toric type", Arithmetic and Algebraic Geometry 2012, 東京大, 2012年2月15日

(13) 尾形庄悦, "Projective normality of toric varieties", 代数幾何講演会, 埼玉大, 2012年2月14日

(14) 尾形庄悦, "Normality of lattice polytopes", 35ACCMCC: Australian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, メルボルン大(オーストラリア), 2011年12月9日

(15) 原伸生, "Aspects of F-regularity -old and new-", 代数学シンポジウム, 岡山大, 2011年8月9日

(16) 尾形庄悦, “ Very ample but not normal lattice polytopes ”, MEGA2011:Effective Methods in Algebraic Geometry, ストックホルム大 (スウェーデン), 2011年5月30日

(17) 原伸生, ” F-blowups of normal surface singularities ”, KIAS(ソウル、韓国), 2011年5月26日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

尾形 庄悦 (Ogata Shoetsu)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90177113

(2) 連携研究者

石田 正典 (Ishida Masanori)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30124548

(3) 連携研究者

原 伸生 (Hara Nobuo)
東京農工大学・工学研究院・教授
研究者番号：90298167