様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４００４２

研究課題名（和文）記号的リース代数のネータ性に関する研究

研究課題名（英文）Research on Noetherian property of symbolic Rees algebras

研究代表者
西田　康二（NISHIDA, Koji）

千葉大学・統合情報センター・教授

研究者番号：６０２２８１８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：この研究では、３次元正則局所環（または多項式環）において高さが２のイデアルＩをとり、任意の整数ｎに対してＩの記号的ｎ乗を計算する新たな方法を見出すと共に、Ｉの記号的リース代数のネータ性に関するHunekeの判定法を改良することを目指した。
　初年度の研究では、複体の＊変形を用いて通常のべき乗の自由分解から記号的べき乗の自由分解を導く為の具体的な手順を見出し、翌年度は記号的リース代数のネータ性について新しい判定法を与えた。３年目の研究では、それまでに得られた結果の実用性を具体例に適用することによって確認し、最終年度にはネータ環でない記号的リース代数を持つイデアルのクラスを拡張した。

研究成果の概要（英文）：In this research, we aimed to find a new method for computing symbolic powers of ideals in 3-dimensional regular local (or polynomial) rings. Furthermore, we aimed to improve the Huneke's criterion for symbolic Rees algebras to be Noethrian.
 In the first year, using *-transform of acyclic complexes, we found a specific procedure to induce free resolutions of symbolic powers from those of ordinary powers. Next year, we gave a new criterion on the Noetherian property of symbolic Rees algebras. In the third year, we checked the practicality of the results we found in the last two years by applying them to concrete examples. The last year was devoted for extending the class of ideals whose symbolic Rees algebras are not Noetherian.

研究分野：可換環論

キーワード：可換環　記号的べき乗　記号的リース代数

１．研究開始当初の背景

可換なネータ環Aの素イデアルPが与えられたとき,任意の整数nに対してP^nのP-準素成分を$P^{(n)}$で表し，P の記号的 n 乗（n-th symbolic power）と言う．さらに，A 上の多項式環A[t]の部分環で

$$a_0 + a_1t + \cdots + a_rt^r \quad (a_n \in P^{(n)})$$

なる形の元から成るものをPの記号的リース代数（symbolic Rees algebra）と言い$R_s(P)$と書く．t の次数を１として，この代数を次数付環と見ることにする．$R_s(P)$がネータ環であることとA上有限生成であることは同値である．1985年にCowsikは，Aが正則で剰余環A / Pが１次元という仮定の下では，$R_s(P)$が有限生成ならば P は set-theoretic complete intersectionとなることを示し，Kronecker の問題に対する新しいアプローチとして，「Aが正則ならば$R_s(P)$は常にA上有限生成であろう」という予想を立てた．Cowsik の問題そのものは,1990年にRobertsにより否定的に解決されたのだが，彼の反例ではAの次元が7であった為，「次元がより低い環についてはどうであろうか？」という問題が残された．特に，問題が非自明になる中で最も単純な3次元の場合には,$R_s(P)$のネータ性を判定する Huneke の方法が既に知られていたので，体K上の多項式環K[X, Y, Z]において space monomial curve：

$$X = t^a,\ Y = t^b,\ Z = t^c$$

を定義する素イデアルP(a, b, c)に対してその記号的リース代数を考察するという試みが盛んに行われた.

後藤-下田-西田は論文[1]において，Huneke の条件がみたされている（従って$R_s(P)$が有限生成になる）という状況で$R_s(P)$が Gorenstein 環となる為の必要十分条件を与え，その場合に$R_s(P)$の生成元として何次のものまで必要となるかを調べた．さらに，論文[2]ではspace monomial curve の定義イデアルを分類し，それぞれの場合に P(a, b, c)$^{(3)}$を実際に求めた. [1]や [2]の内容は非常に厳しい計算が要求されるものであったが，幸いそこで得られた結果を応用することにより，論文[3]において$R_s(P)$が有限生成とはならない様なP = P(a, b, c)の例を，ch K = 0の場合に見出すことができた．しかし，ch K = p > 0 の場合には，その P = P(a, b, c)に対して$R_s(P)$は有限生成となり，pが大きくなるにつれ，必要とされる生成元の次数は大きくなることが分かる（この事実がch K = 0の場合の非有限生成性を導くのである）．

正標数の体上で space monomial curve を定義する素イデアルの記号的リース代数が非有限生成であるかどうかは永田予想とも密接に関連している．ここで言う永田予想とは$\mathbb{P}^2$のm点blow-upに関連する予想である．もう少し正確に述べると「$\mathbb{P}^2$内で一般的な閉点$s_1, s_2, \cdots, s_m$（m ≥10）をとり，i = 1, 2, …，m に対して s_iを定義する$\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$のイデアルを$I_i$とすれば，$d^2 \leq n^2m$をみたす任意の正整数n，dに対して

$$I_1^n \cap I_2^n \cap \cdots \cap I_m^n$$

は 0 と異なる d 次斉次元を持たないであろう」というものである．m が平方数の場合に正しいことは永田自身により証明されている．永田予想と記号的リース代数の非有限生成性の関係は Cutkosky-蔵野の論文[4]の中で明確に述べられているが，そこで議論の要となる概念が[1]～[3]では考察されなかった "negative curve" である.

多項式環A = K[X, Y, Z]においてP = P(a, b, c)を考える際に，3変数X, Y, Zの次数をそれぞa, b, cと定めてA自身に次数付環の構造を入れれば，P を A の斉次イデアルとみることができる．すると任意の整数n > 0に対して$P^{(n)}$も斉次イデアルとなる.そこで $P^{(n)}$に含まれるd次斉次元全体を$[P^{(n)}]_d$で表すことにする．P = P(a, b, c)に対して$[P^{(n)}]_d \neq 0$ かつ $d^2/n^2 < abc$ をみたす n > 0 と d > 0が存在するとき，「K 上で (a, b, c)に対し

て negative curve が存在する」と言うことにする．勿論，negative curve という概念は，本来，幾何学的に定義されるものであるが，それをこの研究で扱う様な代数的枠組みで翻訳すると上で述べた定義となる．

Cutkosky-蔵野[4]によると，a，b，c がどの 2 つも互いに素で abc ≥ 10 のとき，$\mathbb{C}$上で(a，b，c)に対して negative curve が存在しなければ，$m = abc$ に対して永田予想が成り立つ．さらに標数 $p > 0$ の体 K_p 上で記号的リース代数が有限生成でない様な P(a，b，c)が存在すれば，$\mathbb{C}$上で(a，b，c)に対して negative curve が存在しないことも知られている．

引用文献

[1] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space monomial curves, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 465-481.

[2] S. Goto, K. Nishida and Y. Shimoda, Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves, Nagoya Math. J. **124** (1991), 99-132.

[3] S. Goto, K. Nishida and K. Watanabe, Non-Cohen-Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383-392.

[4] S. D. Cutkosky and K. Kurano, Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane, Kyoto J. Math. **51** (2011), 25-45

２．研究の目的

この研究では，体上の 3 変数多項式環（又は 3 次元正則局所環）において高さ 2 のイデアル I をとり（素イデアルとは限らない），まずはその記号的べき乗 $I^{(n)}$を計算する為の新しい方法を確立することを目指した．さらに I の記号的リース代数 $R_s(I)$のネータ性を判定する方法を改良した上で多くの実例を解析し，$R_s(I)$が有限生成にはならないような I のクラスをこれまでに知られているものから大幅に拡張することを目標に据えた．研究が理想的に進展すれば「negative curve を持たないが故に記号的リース代数が有限生成にならない P(a，b，c)の例」を発見することも可能なのではないかと期待した次第である．

３．研究の方法

良く知られているように，正整数 a，b，c の最大公約数が 1 のとき space monomial curve の定義イデアル P(a，b，c)は第 1 行が

$$X^{\alpha} \quad Y^{\beta'} \quad Z^{\gamma'}$$

で第 2 行が

$$Y^{\beta} \quad Z^{\gamma} \quad X^{\alpha'}$$

であるような 2×3 行列の極大小行列式で生成される（ここで α，β，γ，α'，β'，γ'は適当な正整数である）．さらに P(a, b, c)の記号的べき乗の計算は K[X, Y, Z]をイデアル(X, Y, Z)で局所化した環の中で行えば良いことも容易に分かる．そこで，この研究では状況を少し一般化してみた．具体的には，環が Cohen-Macaulay 局所環であるという仮定の下でそのパラメータ系 X, Y, Z をとり，正整数α，β，γ，α'，β'，γ'を先に定めて上に述べたような 2×3 行列を考えてみた．この場合、イデアルは必ずしも space monomial curve の定義イデアルになるとは限らない（それどころか素イデアルになるとも限らない）が，記号的べき乗の生成元を求めるという目的から眺めると，そちらの方が問題の核心が明確化されるのではないかと期待された．

４．研究成果

（１）初年度の研究では，Cohen-Macaulay 局所環上で＊変形という非輪状複体の変形理論を構築した．これは，自由分解が分かっているような R のイデアル J が与えられたとき，R のパラメータ系 x，y，z に対して商イデアル

$$J :_R (x, y, z)R$$

の自由分解となるような非輪状複体を構成するものである．イデアル I を「研究の方法」の欄に述べてあるものとすると，I のべき乗の自由分解は比較的容易に見つけられるが，そこから始めて＊変形を繰り返し施すことにより，I の記号的べき乗を求めることができる．この方法は職人芸的な直観を働かせることなく機械的な操作のみで実行できるし，計算量も従来の方法よりかなり軽減される．

（２）翌年度の研究では Huneke が与えた記号的リース代数 $R_s(I)$のネータ性の判定法を改良した．オリジナルな判定法では，ある剰余環の長さを計算する必要があるのだが，長さの計算が可能であるという状況はそれほど一般的ではない．この年度の主結果は「$R_s(I)$がネータ環となる為には，適当な正整数 m，n に対して次の 2 条件をみたす $f\in I^{(m)}$，$g\in I^{(n)}$が存在すれば良い」という命題である：(i) I は f と g が生成するイデアルのの根基に含まれる，(ii) P を I の任意の素因子とすると ft^mと gt^nが生成する $R_s(I_P)$のイデアルの根基は $R_s(I_P)$の次数正の斉次元を全て含む．

（３）3 年目の研究では，標数が 2 の体上で P = P(13，14，17)として $P^{(n)}$の計算を実行した．計算機を用いて藏野氏が調べてみたところ，これは「正標数で $R_s(P)$がネータ環にはならないような例」の有力な候補ではなかろうかとのことである．全ての n に対して $P^{(n)}$の生成元を求めることを見据えて計算を進めた結果，$P^{(2)}$と $P^{(3)}$については自由分解を与えることができた（n = 2，3 の場合だけを扱った訳ではない）．今後，機会があればこの計算をさらに進めてみたいと思っている．

（４）最終年度の研究では，2 年目の研究成果を応用しながら，ネータ環でない記号的リース代数の例を豊富に見出した．3 以上の整数 m と 2 以上の整数 n をとり，第 1 行が

$$X \quad Y^{m+1} \quad Z^{n+1}$$

で第 2 行が

$$Y \quad Z^n \quad X$$

であるような 2×3 行列の極大小行列式で生成される $\mathbf{Z}[X, Y, Z]$イデアルを J とする．さらに J を $S_\mathbf{Q} = \mathbf{Q}[X, Y, Z]$と $S_p = \mathbf{F}_p[X, Y, Z]$に拡大したイデアルをそれぞれ $J_\mathbf{Q}$と J_p で表す（$\mathbf{F}_p$は標数 p の素体）．主結果は「2mn – 3m – 4n が 3 以上ならば $R_s(J_\mathbf{Q})$はネータ環にはならない」というものである．十分大きな素数 p に対して $R_s(J_p)$は有限生成にはなるが p 次まででは生成なれないという事実が証明の鍵となる．また，剰余環 $S_\mathbf{Q}/(YS_\mathbf{Q} + J_\mathbf{Q})$の長さは 3n + 1 に一致するのだが，n = 2 とするとその値は 7 となる．この結果を用いることにより，space monomial curve を定義する素イデアル P で $R_s(P)$がネータ環ではないものを重複度が 7 となる（これまでに知られている例では最小の値である）ように構成することができた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Kosuke Fukumuro, Taro Inagawa and Koji Nishida, Saturations of powers of certain determinantal ideals, Journal of Commutative Algebra, 査読有，掲載予定，2015, http://projecteuclid.org/euclid.jca/1416233427.

② Kosuke Fukumuro, Hirofumi Kume and Koji Nishida, On modules of linear type, Acta Mathematica Vietnamica, 査読有，

Vol. 40, 2015, 101 – 110, DOI: 10.1007/s40306-015-0116-1.

③ Kosuke Fukumuro, Taro Inagawa and Koji Nishida, On a transform of an acyclic complex of length 3, Journal of Algebra, 査読有, Vol. 384, 2013, 84 – 109, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2013.03.009.

〔学会発表〕（計 6 件）

① 西田康二，有限生成でない symbolic Rees algebra について，第 27 回可換環論セミナー，平成 27 年 1 月 27 日，静岡大学理学部（静岡県静岡市）．

② Koji Nishida, Non-Noetherian symbolic Rees algebras, Commutative Algebra and Singularity Theory 2014，平成 26 年 7 月 28 日，立山国際ホテル（富山県富山市）．

③ Koji Nishida, On modules of linear type, International Conference on Commutative Algebra and Its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatrics，平成 25 年 12 月 17 日，Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics (Hanoi, Virtnam).

④ 西田康二，linear type の加群について，第 35 回可換環論シンポジウム，平成 25 年 12 月 5 日，京都大学数理解析研究所（京都府京都市）．

⑤ Koji Nishida, On a transform of an acyclic complex of length 3, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra，平成 23 年 12 月 16 日，Quy Nhon University (Quy Nhon, Vietnam).

⑥ 西田康二，On a method for computing symbolic powers of ideals，第 33 回可換環論シンポジウム，平成 23 年 11 月 7 日，浜名湖カリアック（静岡県浜松市）．

６．研究組織

(1)研究代表者

西田 康二（NISHIDA, Koji）
千葉大学・統合情報センター・教授
研究者番号：６０２２８１８７

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

藏野 和彦（KURANO, Kazuhiko）
明治大学・理工学研究科・教授
研究者番号：９０２０５１８８

(4)研究協力者

福室 康介（FUKUMURO, Kosuke）
稲川 太郎（INAGAWA, Taro）