様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００４３
研究課題名（和文）射影多様体の埋め込みの構造と定義方程式

研究課題名（英文）The embedding structure of projective varieties and their defining ideals

研究代表者
野間　淳（NOMA, ATSUSHI）

横浜国立大学・環境情報研究院・教授

研究者番号：９０２６２４０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円、（間接経費）　　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：Xを次数d,次元n,余次元eの非特異射影多様体とする．Xの非双有理中心点とは，そこからの射影が像と双有理とならない点のことで，Xの外，内の非双有理中心点の集合をそれぞれB(X),C(X)と表す．本研究では，　第一に，C(X)が１次元以上のXのカステルヌーボーマンフォード正則数は,ほとんどの場合に，d-e+1以下を証明した．　第二に，C(X)が１点で，そこからの点射影像が有理スクロールのとき，二重点因子は基点を持たないことを証明した．　第三に，B(X)が１次元以上の２つの既約成分を持つ多様体を，射影空間束の中の完全交叉として構成した．

研究成果の概要（英文）：Let X be an n-dimensional projective variety of degree d and codimension e. A point is called nonbirational center of X if the linear projection from the point induces nonbirational map to the image. By B(X) and C(X) we denote the set of nonbirational center outside of X and inside of X, respectively. In this study, first, for smooth X having C(X) of dimension at least 1, we show that X is (d-e+1)-regular in most cases. Second we show that if C(X) is a point and if the image of the linear projection from the point is rational scroll, the double point divisor of X is base-point-free. Third we give an construction of an example of X whose B(X) has two irreducible components of dimension at least one.

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：射影多様体　射影埋込み　線形射影　定義方程式　斉次イデアル　カステルヌーボーマンフォード正則数

１．研究開始当初の背景

本研究は射影多様体の regularity (Castelnuovo-Mumford regularity)を背景にした課題である．射影多様体の regularity は，幾何学的には，射影空間の超曲面束がどの位大きな次数のときに，射影多様体の完備な線形束を引き起こすかを表す量であり，代数的には，射影空間内での定義方程式の次数やその関係式である syzygies の次数の上限を表す量で，射影多様体の幾何学的側面と代数的な側面を結びつける重要な不変量である．実際，N 次元射影空間 P^N の射影多様体 X が m-regular であるとは，X のイデアル層 I_Xを直線束 $O_P(1)$でひねったものの cohomology の消滅条件

(C_m)「$H^i(P^N, I_X(m-i))=0$ (全ての $i>0$)」

が成立することである．更に，(C_m)が成立する最小の m が X の regularity である．

本研究の背景には，未解決問題 regularity 予想「いかなる超平面にも含まれない P^N の次数 d，次元 n,余次元 e=N-n の射影多様体 X については，m=d-e+1 について(C_m)が成立する」がある．この予想に関して，代数曲線の場合[Gruson-Lazarsfeld-Peskine1983]と非特異複素代数曲面の場合[Lazarsfeld1987]にこの予想が正しいことが証明されているのみで，それ以外については，現在までにさまざまなアプローチがあるが，未解決のままである．

本研究では，(C_m)に関連する,射影多様体 X 二対する次の条件

(A_m) X に含まれない P^N の直線 L と X との交点数の上限は m である；

(B_m) X は，X を含む次数 m 以下の超曲面の共通部分と集合論的／スキーム論的／イデアル論的に一致する；

(D_m) P^N の m 次以上の超曲面のなす線形束は射影多様体上で完備である；

に注目して研究する．というのは，Castelnuovo-Mumford の一般論により

$(C_m) \to (B_m) \to (A_m)$,　$(C_m) \to (D_{m-1})$

が成立するので，(A_{d-e+1}), (B_{d-e+1}), (D_{d-e})が成立するか調べることは自然な問題となるからである．更に，拡張された regularity 予想においては，m が d-e+1 に十分に近い場合には$(A_m)\to(C_m)$が成立することも予想に含まれているのでこれらの相互関係を調べることは重要であると考えられる．

(A_{d-e+1})については，[Bertin2002]と[Kwak2005]による先行研究のもとに，[Noma2005]と[Noma2009]により，射影多様体が Cohen-Macaulay 的な場合に(A_{d-e+1})が成立することを証明し，さらに多重割線と切断種数の関係を明らかにしてきた．しかしながら，一般の特異点を持つ場合には，(A_{d-e+1})が得られておらず，(B_{d-e+1})を示すことで，これを解決できないかと期待されている．

(B_{d-e+1})については，[Noma2010]で，線形射影で超曲面を構成する方法によって研究してきた．これにより，非双有理中心点の集合であるセグレローカスという集合を調べることが重要であると分かってきた．非双有理中心点とは，その点からの射影が射影多様体 X とその像との間に双有理写像を引き起こさない点をいう．このとき，セグレローカス B(X)とは，X の外の非双有理中心点の集合で，インナーセグレローカス C(X)とは，X の非特異点である非双有理中心点の集合をいう．B(X)は射影幾何の観点より，[Segre1936], [Segre1937], [Calabri-Ciliberto2001]によって研究された．本研究の前の課題の成果[Noma2010]では，「これらの超曲面の共通部分は，射影多様体とそのセグレローカスの和集合となる」ことが分かったので，「セグレローカスが空集合とはならない射影多様体を特徴づける」ことや「セグレローカスと射影多様体を分離する超曲面をどのように探すか」ということが次の問題であることが明らかになってきた．

他方で，射影多様体の非双有理中心点の研究から着想した，射影多様体の二重点因子の豊富性の結果も C(X)の研究と関わっている．非特異射影多様体 X に対して，その二重点因子とは，H を超平面切断因子，K_Xを標準因子とするとき，因子(d-n-2)H- K_Xのことである．ただし，d は X の次数，n は X の次元を表す．これまで，Mumford によりこの因子は固定点を持たないことが示され，更に，[BoIlic2001]により，この因子は豊富が研究されていた．C(X)の研究の際に，非双有理中心でない X の点 x を選ぶとそれに対して，十分に一般の内点が張る線形部分空間からの線形射影は，選ばれた点 x で埋め込みとなることが分かっていた．この線形射影を用いて，(d-n-2)の部分を小さく取りかえるというアイディアで，幾つかの例外を除くと，(d-n-e-1)H- K_Xは C(X)以外では固定点を持たないこと，その結果として，(d-n-e)H- K_Xは豊富であることが分かっていた．他方，C(X)が本当に基点となるかどうかという問題に関して，C(X)の１次元以上の成分は，C(X)の構造定理と[BoIlic2001]を合わせることにより，(d-n-3)H- K_Xの基点となることが分かっていた．しかし，C(X)が０次元の成分について，基点となるかどうかについては，不明であった．

２．研究の目的

本研究の目的は，代数多様体の射影空間への埋め込みの構造について，定義方程式とそのイデアルなど代数的対象と線形射影や超曲面などの幾何学的対象を，相互関係に注目して調べることである．具体的には，次数d，次元n,余次元e=N-nの射影多様体Xに対し，

(B_{d-e+1})「Xを含む次数(d-e+1)次以下の超曲面の共通部分はXと一致する」,

(D_{d-e})「(d-e)次以上の超曲面が作る線形束はX上で完備」

という問題の解決を目標とした．これを通して，(A_{d-e+1})の解決や，(C_{d-e+1})の解決へ向けての糸口を探すことが目標である．

そのためには，これまでの研究によりその重要性が明らかとなった，非双有理中心点の集合であるセグレローカスB(X)やインナーセグレローカスC(X)を調べることが一つの課題であり，これをもとに研究を進めた.

３．研究の方法
目的のところで述べた目標を達成するために，これまでに得られた結果をもう一度点検し，その周辺にある未解決な小問題を列挙するとともに考察することを先ず行った．これと平行して，問題を次のように分割して考察を行った.
(1)セグレローカス B(X)，C(X)を射影多様体から分離する超曲面の構成
B(X)を X から分離する超曲面のうちで次数の低い（特に d-e+1 次以下の）ものを構成する方法を見つける．また，C(X)での接空間を分離する，次数の低い超曲面を見つける．その際に，これまで得られていた構造定理により，B(X)，C(X)を持つ射影多様体の構造に注目し，代数的なアプローチを行った．また，幾何学的な方法として，交わりの長さの大きな線形部分空間を見つけ，そこからの線形射影を利用する方法も検討した.
このうち特に，C(X)が１次元以上の成分を持つ，非特異射影多様体について，C(X)に沿って X を定義する方程式を代数的な構成を行った.

(2)セグレローカスを持つ多様体の特徴付け
セグレローカスを持つ多様体は，際立った特徴を持つことが期待される．これまで，一つの既約成分に注目して，射影多様体の構造を与えた．更にこれを進めて，(1)にも応用ができるように構造の研究を行った．他方で，セグレローカスとして複数の既約成分を持つ射影多様体の構造についても構造の考察を行うとともにこのような例の構成も検討した.
特に，B(X)として１次元以上の既約成分を複数持っている射影多様体の構成と特徴付けについて考察した.
関連して，C(X)が点集合となる非特異射影多様体について，その二重点因子が C(X)において基点を持つかを調べた.

(3)射影空間の超曲面束から引き起こされる線形束の完備性
問題(D_{d-e})については，一般の多様体では，どのような方法があるか今のところ見当もつかない状況であるので，特殊な多様体で計算が可能な多様体について検討を行った.
特に，C(X)が１次元以上の成分を持つ非特異射影多様体 X について(D_{d-e})が成立するかどうかを調べた.

４．研究成果
(1) ロス多様体の regularity
C(X)が空集合でない場合の非特異な射影多様体 X について，C(X)を分離する X の定義方程式を代数的な手法で，方程式の次数の上限を評価しながら構成した．更に，この考え方により，C(X)が１次元以上の集合となっている非特異射影多様体 X の regularity の評価が得られた．実際このような多様体は，直線を頂点集合に持つ次数 a の有理スクロールの m 次因子となっていることが昨年度までの研究で証明済みで，このような多様体はロス多様体として知られている．この事実をもとに，このような X は，(d-e+1+((1-e)m+a–2))–regular であることを証明した. この結果は，ほとんどの場合に((1-e)m+a–2<0 の場合に)，期待された評価であることが分かり，２つの予想（問題）(B_{d-e+1})と(D_{d-e})の状況証拠を得ることができた．更に，この評価を改良する研究を行った結果，ある種の不変量が真に降下すれば，全ての場合について(d-e+1)-regular であることが分かった．他方で，単項式で生成された線形束で X が埋込まれている場合には，不変量が真に降下することが分かり，結果として，(d-e+1)-regular であることが分かった.

(2) C(X)が点集合となる場合に，二重点因子の基点
X を次数 d,次元 n,余次元 e の非特異射影多様体とする．C(X)が X の二重点因子(d-n-e-1)H-K_X の基点になるかどうか研究した．ただし，H を超平面切断因子，K_X を標準因子とする．これまでの研究で，X は，幾つかの例外とならなければ，(d-n-e-1)H- K_X は C(X)以外に基点を持たないことが示されていた．そこで，C(X)が１点集合となる非特異射影多様体で，その点からの点射影の像が有理スクロールとなる場合について，二重点因子に対応する完備な線形束は基点を持たないことを証明した.

(3) B(X)に１次元以上の既約成分を２つ持つ射影多様体の構成と特徴づけ
外の非双有理中心点集合B(X)が１次元以上の２つの既約成分を持っているような射影多様体Xの例の構成や特徴付けについて研究した. このような多様体の例として，先行研究[Segre1937]や[Calabri- Ciliberto 2001]による，２つの超曲面錐体の完全交叉となっている多様体のみしか知られていなかった．本研究において，これら以外の例を構成した. さらに，ある条件のもとでは，このような射影多様体Xは，射影空間束の中の完全交叉多様体の双有理像となることがわかった.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

① Atsushi Noma, Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double

point divisors, Transactions of the American Mathematical Society, **査読有, (2014)印刷中.**

〔学会発表〕（計　７件）

① <u>Atsushi Noma</u>, Castelnuovo-Mumford regularity of Roth varieties, **研究集会**「Jeonju Workshop on Projective Algebraic Geometry and Moduli」, 2013 **年** 3 **月** 22 日～3 **月** 23 **日**, JeonJu Riviera Hotel (Korea).

② <u>Atsushi Noma</u>, Pojective varieties with nonbirational centers, 「2013 KAIST Winter School on Algebraic Geometry」,2013 **年** 1 **月** 23 日～1 **月** 25 **日**, KAIST (Korea).

③ <u>Atsushi Noma</u>, Castelnuovo-Mumford regularity of Roth Varieties, 「**第二回若手代数複素幾何研究集会**」, 2012 **年** 12 **月** 17 日～12 **月** 20 **日, 佐賀大学.**

④ <u>Atsushi Noma</u>, Projective varieties whose generic inner projections are not finite in codimension one I, II, 「Workshop on Projective Varieties」,2012 **年** 3 **月** 2 **日**, 5 **日, 佐賀大学.**

⑤ <u>Atsushi Noma</u>, Generic Inner Projection of Projections of Projective Varieties and the Positivity of Double Point Divisors I, II, III, 「KAIST Algebraic Geometry Seminor」, 2012 **年** 2 **月** 9 日～2 **月** 11 **日**, KAIST(Korea).

⑥ <u>Atsushi Noma</u>, Projection of projective varieties I, II, III, 「KAIST Algebraic Geometry Seminor」, 2011 **年** 12 **月** 20 **日** ～12 **月** 22 **日**, KAIST(Korea).

⑦ **<u>野間　淳</u>, 射影多様体の一般内点からの線形射影とその二重点因子,「大阪大学代数幾何学セミナー」**, 2011 **年** 7 **月** 22 **日, 大阪大学.**

６．研究組織

(1)研究代表者

野間　淳（NOMA ATSUSHI）
横浜国立大学・環境情報研究院・教授
研究者番号：90262401

(2)研究分担者　（なし）
（　　　）
研究者番号：

(3)連携研究者　（なし）
（　　　）
研究者番号：