

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540052

研究課題名(和文)可換代数学における完全交叉のレフシェッツ性問題に関する研究

研究課題名(英文)On the Lefschetz properties of complete intersections in commutative algebra

研究代表者

張間 忠人(HARIMA, Tadahito)

新潟大学・人文社会・教育科学系・教授

研究者番号：30258313

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：完全交叉のレフシェッツ性について研究し、次の成果を得た。1.  $m$ -fullイデアルで定まる次数付アルティン代数が弱いレフシェッツ性をもつための必要十分条件を次数付ベッチ数の言葉で与えた。これは componentwise linear イデアルに関する Wiebe の結果の一般化である。2. アルティン代数のレフシェッツ性に関する研究書を出版した。この本では、この10年間で得られた研究成果を紹介している。3. 無限体上の多項式環において、completely  $m$ -full イデアルのクラスと componentwise linear イデアルのクラスは一致することを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied the Lefschetz properties of complete intersections, and got the following results. 1. We gave a necessary and sufficient condition for a graded Artinian algebra defined by an  $m$ -full ideal to have the weak Lefschetz property in terms of graded Betti numbers. This is a generalization of a theorem of Wiebe for componentwise linear ideals. 2. We published a monograph on the Lefschetz properties of Artinian algebras. In this book we present recent results that were obtained and developed by authors over the last 10 years. 3. We showed that the class of completely  $m$ -full ideals coincides with the class of componentwise linear ideals in a polynomial ring over an infinite field.

研究分野：可換環論

 キーワード：完全交叉 レフシェッツ性  $m$ -fullイデアル completely  $m$ -fullイデアル componentwise linearイデアル Betti数 Rees元 アルティン環

## 1. 研究開始当初の背景

完全交叉のレフシェッツ性問題について、次の予想がある。

予想：完全交叉アルティン次数付環は、強いレフシェッツ性をもつ。

この予想は、組合せ論、代数幾何学、表現論の様々な問題と深く関連している。

1980年代の後半に Stanley 氏と渡辺純三氏により、独立に「単項式で構成される完全交叉アルティン環は強いレフシェッツ性をもつ」ことが証明された。しかし、その後、一般の完全交叉アルティン次数付環に対しても同じ結果が期待されていたが、未解決のままであった。ところが 2003 年に研究代表者は、Juan Migliore 氏、Uwe Nagel 氏、渡辺純三氏との共著論文

・ The weak and strong Lefschetz properties for Artinian K-algebras

において、「余次元 3 の完全交叉アルティン次数付環は弱いレフシェッツ性をもつ」ことを証明した。この結果は、これまで 20 年間、進展が見られなかった完全交叉のレフシェッツ性問題の肯定的解決に向けて大きなステップとなった。

強いレフシェッツ性と弱いレフシェッツ性は、ゴレンスタインアルティン次数付環に対して期待される自然な性質であり、さらに、レフシェッツ性をもつアルティン次数付環の数値的不変量（とくにヒルベルト関数、ベッチ数列、Dilworth 数、Rees 数）はよく研究されており、それ故に、どのようなアルティン環がこれらの性質をもつか？という問いは興味あるものである。これらの性質をもつゴレンスタイン環そして完全交叉環は、これまでも国内外の多くの人達により、広範囲において研究されている（M.Boij、A.V.Geramita、A.Iarrobino、J.C.Migliore、U.Nagel、D.Popescu、Y.S.Shin、L.Smith、R.Stanley、F.Zanella、池田ひでみ、前野俊昭、沼田泰英、和池輝仁、渡辺純三 他）。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究の目的は、次の問題について考察し、解決することであった。

問題 1：完全交叉アルティン次数付環は強いレフシェッツ性をもつか？

これまでの渡辺純三氏との 4 編の共著論文

・ The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property (2003)

・ The central simple modules of Artinian

Gorenstein algebras (2007)

・ The strong Lefschetz property for Artinian algebras with non-standard grading (2007)

・ The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras (2008)

において、ゴレンスタイン環のレフシェッツ性問題に関する中心単純加群の理論を構築することができ、完全交叉アルティン環のレフシェッツ性予想の解決に向けて大きく前進した。これらの結果を踏まえ、この問いに関しては、対称群の作用で不変な完全交叉（さらにはゴレンスタイン環）のクラスに注目し研究を進めた。一方で否定的解決であったとしても、すなわち、強いまたは弱いレフシェッツ性を持たない完全交叉アルティン環が存在したとしても、これもまた、完全交叉アルティン環の新しい分類研究に関する対象として大変興味深いものになるであろう。

(2) 完全交叉のレフシェッツ性問題と関連して、次の問題が考えられる。

問題 2：完全交叉イデアルのジェネリックイニシャルイデアルを決定せよ。

これまでの和池輝仁氏との 2 編の共著論文

・ Generic initial ideals, graded Betti numbers and k-Lefschetz properties (2009)

・ Generic initial ideals of some monomial complete intersections in four variables (2010)

において、k 階レフシェッツ性なる概念を導入し、完全交叉のジェネリックイニシャルイデアル決定問題への一つの方向性を示すことができた。これらの結果を踏まえ、問題 2 に関しては、単項式で生成される完全交叉イデアルのクラスに注目し研究を進めた。

(3) さらに、完全交叉のレフシェッツ性問題は、アルティン局所環の一般元の振る舞いに関する問いとしてとらえることができる。これについて、一般元で定まる射のジョルダン分解が研究対象になり、最強のジョルダン分解が計算できるアルティン局所環のクラスを探る。

## 3. 研究の方法

(1) 問題 1 について、渡辺純三氏（東海大学）とのこれまでの共同研究において整備してきた中心単純加群の理論をさらに発展させると同時に、新たな手法を開発し解決を目指した。とくに、渡辺純三氏と和池輝仁氏（北海道教育大学）との協力の下で「対称群の作

用で不変な完全交叉環は強いレフシェッツ性をもつ」ことを解決するために、まず、対称群の作用で不変な2次式で生成される完全交叉のレフシェッツ性について考察を進めた。

(2) 問題2について、和地輝仁氏とのこれまでの共同研究で得られた結果をさらに発展させると同時に、新たな手法を開発することで、この問題の解決を目指した。

(3) 新たな問題である「アルティン局所環における一般元の振る舞い」について、五十川読氏(熊本高等専門学校)と共同研究を行った。

(4) これまで10年間の研究集会「可換環論と鏡映群の表現論」で得られた完全交叉のレフシェッツ性問題に関する研究成果を、研究集会の主メンバー6名との共同研究として、講義録としてまとめることを試みた。

#### 4. 研究成果

(1) 渡辺純三氏は、Proceeding of AMSに掲載された論文“A note on complete intersections of height three”の結果を一般変数に拡張した。即ち次のことを証明した： $n$ 変数多項式環において、 $(F_1, \dots, F_n)$ を完全交叉とし、各 $F_i$ の次数を $d_i$ とする。このとき、一般的1次式 $L$ に対して、イデアル $(L, F_1, \dots, F_n)$ の極小生成元の個数が $n+1$ であるための必要十分条件は、 $d_1 + \dots + d_{n-1} - n > d_n$ である。このことは、「任意の完全交叉が強いレフシェッツ性をもつ」ことを仮定するならば当然成立することである。

(2) 渡辺純三氏の協力の下で、 $m$ -full イデアルが弱いレフシェッツ性をもつための必要十分条件をその次数付ベッチ数列の言葉で記述することができた。これは、componentwise linear イデアルに関する2004年のWiebeの結果の一般化である。また副産物として、標数ゼロ上においてcompletely  $m$ -full イデアルとcomponentwise linear イデアルは同値な概念であることを示した。

(3) 研究集会「可換環論と鏡映群の表現論」で得られた完全交叉のレフシェッツ性問題に関するこれまで10年間の研究成果を講義録としてまとめ、Springerから出版した。これは、研究集会の主メンバー6名との共同研究であり、今回のプロジェクトの最大の成果である。

例えば6章では、Rees元と呼ばれる一般元の存在を証明し、その性質について論じている。また、強いレフシェッツ性は持たないが弱いレフシェッツ性をもつゴレンスタイン環の組織的な構成方法も与えている。

さらに、渡辺純三氏は、ヘッセ行列式が恒等的に消える代数式に関するGordanとNoetherの結果(1876年)の証明と彼らのやり残した課題について、2012年9月に開催されたハワイ東海大における国際研究集会(渡辺純三氏主催)で発表し、Nagel氏やMigliore氏たちの推進する4変数完全交叉環の弱いレフシェッツ条件の研究に大きく貢献できた。また、同研究会に参加したゲッティンゲン大学名誉教授のLarry Smith氏により、代数的トポロジーの立場より、いくつかの共同研究のテーマを得ることができた。とりわけ、正標数における弱いレフシェッツ条件に新しい意味をみつけることができた。その方法で得られる例は講義録の中でまとめた。

(4) 渡辺純三氏は、3変数でRees性を有するが $m$ -fullではないモノミリアルイデアルを体系的に構成する方法を与えた。これは、村井聡氏、Migliore氏、Nagel氏、Miro-Roig氏との共同研究である。

(5) 渡辺純三氏の協力の下で、レフシェッツ性問題との関連において「任意標数上で、completely  $m$ -full イデアルとcomponentwise linear イデアルのクラスは一致する」ことを証明した。また応用として、Nagel氏とRomer氏らの結果であるcomponentwise linear Gorenstein イデアルの構造定理の別証明を与えた。

(6) 五十川読氏との協力の下で、 $m$ -full性とRees性に関する研究を進めた。五十川氏は、イデアルのRees性とそれに関連するイデアルの性質「第2Rees性、 $m$ -full性およびfull性」を、階数付き半順序集合とその上の順序準同型を用いて定式化することにより、(部分)加群の性質に拡張し、Rees性と第2Rees性および $m$ -full性とfull性の間の双対(1対1対応)を構成した。また、Rees性、第2Rees性、 $m$ -full性およびfull性の間に成り立つ関係を調べ、どのような条件があれば $m$ -full性とRees性が一致するかを明らかにした。さらに、自由加群の部分加群がfull性を持つとき、ベッチ数を用いてこの部分加群が $m$ -full性を持つための必要十分条件を特徴づけた。

(7) 渡辺純三氏と和地輝仁氏との共同研究では、「対称群が変数の置換として作用する2次式完全交叉環は、強いレフシェッツ条件をみたす」ことが証明できた。これは表現論の基本定理を使うことにより、一次基本対称式の積作用が、isotypic component毎に分解することから証明される。後藤氏の定理により、完全交叉環のYoung-部分群による不変式部分環も完全交叉である。この完全交叉に対して、2007年の論文The strong Lefschetz property for Artinian algebras with non-standard gradingで証明した「部分環定

理」と今回得られた定理を使えば、それが、強いレフシェッツ条件をみたすことが証明できる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Tadahito Harima and Junzo Watanabe, Completely  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 158 巻 239-248 (2015), 査読有

Satoru Isogawa, Rees property and its related properties of ranked partially ordered sets, 熊本高等専門学校研究紀要, 6 号 66-73 (2015) 査読無

Satoru Isogawa, Rees property and its related properties of modules, 熊本高等専門学校研究紀要, 6 号 74-81 (2015) 査読無

Tadahito Harima, Satoru Isogawa and Junzo Watanabe, A note on graded Betti numbers of completely  $m$ -full ideals, 新潟大学教育学部研究紀要, 7 巻 1-6 (2014), 査読無

Juan Migliore, Rosa M. Miro-Roig, Satoshi Murai, Uwe Nagel and Junzo Watanabe, On ideals with the Rees property, Archiv der Mathematik, 101 巻 445-454 (2013) 査読有

Tadahito Harima and Junzo Watanabe, The weak Lefschetz property for  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, Illinois Journal of Mathematics, 56 巻 957-966 (2012) 査読有

Junzo Watanabe, On the minimal number of generators of the quotient of a complete intersection by a general linear form, Proceedings of the School of Science of Tokai University, 47 巻 1-10 (2012) 査読無

Toshiaki Maeno, Yasuhide Numata and Akihito Wachi, Strong Lefschetz elements of coinvariant rings of finite Coxeter groups, Algebras and Representation Theory, 14 巻 625-638 (2011) 査読有

[学会発表](計 10 件)

和地輝仁, The Lefschetz properties and

complex reflection groups, Workshop on Lefschetz Properties 2015 年 3 月 10 日, Universitat Goettingen (ドイツ)

渡辺純三, The quadratic complete intersections associated with the action of the symmetric group, Workshop on Lefschetz Properties, 2015 年 3 月 9 日, Universitat Goettingen (ドイツ)

五十川読, Rees property and its related properties of ranked partially ordered sets, 第 132 回日本数学会九州支部例会, 2015 年 1 月 22 日, 福岡大学 (福岡県)

張間忠人, 渡辺純三, Completely  $m$ -full ideals and componentwise linear ideal, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会一般講演, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学 (広島県)

渡辺純三, 2 次式で生成される完全交差環のレフシェッツ性について, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 2014 年 9 月 23 日, 宮島コラルールホテル (広島県)

和地輝仁, 複素鏡映群の余不変式環の強いレフシェッツ性, 日本数学会 2014 年度年会一般講演, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学 (東京都)

渡辺純三, A new class of Gorenstein algebras with the strong Lefschetz property, International conference on Commutative Algebra and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, 2013 年 12 月 17 日, Hanoi (Vietnam)

渡辺純三, 強いレフシェッツ性条件, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 2013 年 8 月 9 日, 下関市生涯学習プラザ (山口県)

渡辺純三, Introduction to the paper of Gordan-Noether (Homogeneous Polynomials whose Hessian determinant Identically vanishes), Aspects of SLP and WLP, 2012 年 9 月 12 日, Hawaii Tokai International College (USA)

張間忠人, 渡辺純三, The weak Lefschetz property for  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, 日本数学会 2012 年度年会一般講演, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学 (東京都)

[図書](計 1 件)

Tadahito Harima, Toshiaki Maeno, Hideaki Morita, Yasuhide Numata,

Akihito Wachi and Junzo Watanabe,  
The Lefschetz properties, Springer,  
Lecture Notes in Mathematics, 2080 卷  
1-250 (2013) 査読有

〔その他〕

ホームページ等

[http://researchers.adm.niigata-u.ac.jp/  
html/100000788\\_ja.html](http://researchers.adm.niigata-u.ac.jp/html/100000788_ja.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

張間 忠人 (HARIMA, Tadahito)  
新潟大学・人文社会・教育科学系・教授  
研究者番号：30258313

### (2) 研究分担者

渡辺 純三 (WATANABE, Junzo)  
東海大学・理学部・特任教授  
研究者番号：40022727

五十川 読 (ISOGAWA, Satoru)  
熊本高等専門学校・共通教育科・教授  
研究者番号：80223056

### (3) 連携研究者

和地 輝仁 (WACHI Akihito)  
北海道教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：30337018