様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：２４４０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００５４

研究課題名（和文）群環のＡｕｓｌａｎｄｅｒ－Ｒｅｉｔｅｎ有向グラフ

研究課題名（英文）Auslander-Reiten quivers of group rings

研究代表者
河田　成人（KAWATA, Shigeto）

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：５０１９５１０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円、（間接経費）　　690,000円

研究成果の概要（和文）：有限群の整数表現（完備離散付値環上の表現）において、Lを高さ0の表現加群とし、SをLのソースとする。Lを含むAuslander-Reiten有向グラフの連結成分の形状がA無限型と呼ばれる半平面的に広がる格子状かもしくは半無限に伸びる筒状であることと、Sを含む連結成分の形状がA無限型であることとが同値であることを確かめた。また、Lを簡約化して得られるモジュラー表現加群（正標数の体上の表現加群）が直既約である場合には、Lで終わる概分裂列の中間項が直既約となることが分かった。さらに標数が2の場合では、奇数階数の表現加群を含む連結成分の形状がA無限型であることも証明することができた。

研究成果の概要（英文）：Let RG be an integral group ring of a finite group G over a complete discrete valuation ring R with residue class field k of positive characteristic. Suppose that L is an indecomposable RG-lattice of height zero, and let S be a source of L. We have shown that the tree class of the Auslander-Reiten component containing L is A-infinity if and only if the tree class of the Auslander-Reiten component containing S is A-infinity. Also, we have proved that the middle term of the almost split sequence terminating in L is indecomposable if the reduced kG-module of L is indecomposable. In the case of 2-modular system, we have shown that the tree classes of the Auslander-Reiten components containing odd rank RG-lattices are A-infinity.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Auslander-Reiten有向グラフ　有限群の表現　概分裂列

１．研究開始当初の背景

多元環の表現における Auslander-Reiten の理論では、 Auslander-Reiten 有向グラフ（以下 AR グラフと書く）と呼ばれるグラフが主な研究対象となる。AR グラフとは直既約加群の同型類を点にもち、既約写像を矢とみなして得られるグラフのことである。有限群のモジュラー表現の場合には K. Erdmann によって AR グラフの形状は決定された[K. Erdmann: On Auslander-Reiten components for group algebras, J. Pure Appl. Algebra 104(1995), 149-160]。すなわち、正標数の体上の群多元環がいわゆる野性的表現型であれば、AR グラフの形状は A 無限型と呼ばれる格子状の半平面か、もしくは半無限に伸びる筒型であることが示された。一方で整数表現（完備離散付値環上の表現）における AR グラフの形状については、有限表現型やいわゆる順的表現型の場合には調べられているが、一般の野生的表現型の場合にはどのようなものなのか、少数の例を除いてあまり知られていないのが実情である。なお，群多元環は多くの場合に野生的表現型である。

２．研究の目的

有限群の表現論を研究するにあたって、正標数の体上の表現（以下でモジュラー表現と呼ぶ）と標数０の体上の通常表現を並行して考察することは大変有効であり、さらにこれらのモジュラー表現と通常表現を有機的に結び付けるものとして完備離散付値環上の表現（以下では整数表現と呼ぶ）が重要な役割を担う。

またアルティン環や完備離散付値環上の多元環の表現論において Auslander-Reiten の理論が駆使されているが、この理論の有限群の表現への応用を図り、さらなる有効性を探りたい。Auslander-Reiten の理論においては、Auslander-Reiten 有向グラフ（AR グラフ）と呼ばれるグラフが研究の主な対象となる。有限群のモジュラー表現と整数表現を Auslander-Reiten の理論を通して統一的に研究するために、モジュラー表現での結果をもとにして、有限群の整数表現における AR グラフの形状の決定を目指して研究を進めたい。現時点で整数表現における AR グラフで調べられている例は、位数が素数幕の有限群の野生的表現型で自明な表現加群を含む AR グラフの連結成分は A 無限型であること[T. Inoue and S. Kawata: On Auslander-Reiten components and trivial modules for integral group rings of *p*-groups, J. Algebra 203(1988), 374-384]や、射影加群とその根基を含む AR グラフの連結成分は A 無限型であること[S. Kawata: On Auslander-Reiten components and projective lattices of *p*-groups, Osaka J. Math. 38 (2001),487-499]など、少数である。そこで、実例を数多く調査していくことを手始めにして、一般の AR グラフの形状を研究していきたい。

ところで、モジュラー表現における表現加群を完備離散付値環上の加群と見なしてその射影被覆を考えたときの核となっているような表現加群は Heller 格子と呼ばれるが、[S. Kawata: On Auslander-Reiten components and Heller lattices for integral group, Algebr. Represent. Theory 9(2006), 513-524]で野性的表現型の整数表現では Heller 格子を含む AR グラフの連結成分は A 無限型であること、さらに Heller 格子は A 無限型の AR グラフの端点に位置していることを突きとめた。この結果をもっと発展させるためにモジュラー表現における AR グラフとの関連に注目したい。さらに整数表現での既約加群や射影加群の AR グラフにおける位置についての考察を通じて、有限群の表現論における応用を見つけたい。

さて，群環は多元環のなかでも重視すべきクラスであり、群環の表現加群の研究は一般のアルティン環や完備離散付値環上の多元環の表現論の研究とも互いに大きく影響を及ぼしあっている。例えば、[S. Kawata: On Heller lattices over ramified extended orders, J. Pure Appl. Algebra 202 (2005), 55-71]において得られた結果として、係数環を充分大きくとれば，直既約なモジュラー表現加群の Heller 格子は直既約であるということが示れた。さらに、モジュラー表現加群の間の準同型写像は Heller 格子の間の準同型写像に持ち上げ可能であり、ひいてはモジュラー表現加群の短完全列が整数表現における格子の短完全列に持ち上げ可能であることも見出された。そしてこれらのことは群環だけに限らず、もっと一般の完備離散付値環上の多元環（いわゆる整環）に対しても、係数環の極大イデアルで簡約化した体上の多元環が概 Frobenius 環であれば上記のような事実が成り立つことが確かめられた。このように、有限群の表現論の研究で得られた成果を広く反映させて、アルティン環や完備離散付値環上の多元環の研究の発展にも寄与したい。実際、環論全体の中でも群環は重要な位置を占めるが，群環独自の性質から一般化された概念として自己入射性や対称多元環、Brauer 多元環などが列挙される。そこで群環を具体的な実例として常に意識しつつ、様々なクラスの環の総合的な理解を目指す研究を AR グラフの考察を通して行いたい。

３．研究の方法

有限群の表現論においては、群とその部分群、特に素数幕位数の部分群や局所部分群に注目して、表現加群の誘導と制限の関連を研究対象とすることが多いが、ここにも Auslander-Reiten 有向グラフ（AR グラフ）を利用する。即ち、一つ一つの表現加群の制限・誘導を個別に調べるだけでなく、AR グラフの連結成分全体にまつわる部分群に関する制限・誘導を吟味することによって、新たな知見を目論む。特に既約加群を含む AR グラフの連結成分を何らかの部分群と関連づけて制限・誘導などの操作を施したとき、ど

のようなARグラフの連結成分が現れるのか、観察を行う。さらにできれば、ARグラフの端点に位置するような表現加群はどのような性質を持つものなのかを模索する。

有限群の整数表現（完備離散付値環上の表現）においては、ARグラフの形状の決定を目標として研究を進める。モジュラー表現におけるErdmannの定理と類似の主張が整数表現でも成立するのではないかと予想している。そのためにまず位数が素数冪の有限群に着目してその整群環の AR グラフの形について考察する。素数巾位数の有限群の場合には、自明な加群や射影加群を含む AR グラフの連結成分の形状は格子状の半平面かまたはチューブであると示したので、次の段階として、比較的計算が実行しやすそうなトレース分裂加群やendo-trivial表現加群を含むARグラフの連結成分について考察を進める。実際、係数環が十分に大きい場合には、表現加群がトレース分裂加群であることは、いわゆるvirtually irreducible という概念に見合う表現加群であることが分かり、特に概分裂列の構造が調べやすい。また、一般位数の有限群の整数表現の場合には、既約加群や射影加群、置換加群などが特に重要と思われるので、そのような表現加群を含む AR グラフの連結成分について注視する。整数表現のときにはある種の既約加群は AR グラフの端点に位置することは既に証明したので、これら既約加群を端緒として考察を始める。

ところで、有限群のモジュラー表現と整数表現とは密接に結びついている。例えば、整数表現において直既約な射影加群を簡約化すると、モジュラー表現における直既約射影加群が得られる。ARグラフについてもモジュラー表現と整数表現との間の関係を追求する。整数表現における射影加群を含む AR グラフの連結成分の一部分を簡約化すると、モジュラー表現における射影加群と AR グラフの一部分が得られる [S. Kawata: On standard Auslander-Reiten sequences for finite groups, Arch. Math. 75 (2000), 92-97]。この事実を詳しく検証することで、モジュラー表現における AR グラフについて知られている結果を、整数表現の AR グラフに反映させることができるのではないかと期待している。

なお、群環は代表的な対称多元環であって、多元環のなかでも重要なクラスである。そして群多元環の一般化として自己入射的多元環やFrobenius環、概Frobenius環などの広がりがある。源泉としての群多元環を常に念頭におきつつ、一般化された様々なクラスの環の類似性と相違性を見極めることによって、多元環やアルティン環の研究の新たな展開にも貢献したい。なお、環論全体の研究を推進するために、毎年「環論および表現論シンポジウム」が開催されている。このシンポジウムを補助することで運営に協力する。

４．研究成果

有限群の整数表現（完備離散付値環上の表現）において、 無限表現型のブロックのAuslander-Reiten 有向グラフ（AR グラフ）の連結成分でトレース写像が分裂する表現加群を含むものについて研究を進めた。特に、次に述べる条件(A)または(B)のどちらか一方を満たすような表現加群に注目した。

(A) 素数巾の真部分群に制限した加群における直既約分解において、トレース写像が分裂するような直既約因子がただ一つだけ現れる。

(B) 正標数のモジュラー表現加群に簡約化した加群における直既約分解において、トレース写像が分裂するような直既約因子がただ一つだけ現れる。

なお、これらの条件を満たす表現加群の例として自明な表現加群や endo-trivial 表現加群がある。無限表現型のブロックにおいて、条件(A)または(B)を満たす表現加群を含む連結成分のグラフとしての形状は、A無限型と呼ばれる半平面状の網目格子かあるいは半無限の筒型であり、対象となっている表現加群は連結成分の端に位置していることが確かめられた。ところで、自明な表現加群の概分裂列とトレース写像が分裂する表現加群をテンソルすると、トレース写像が分裂する表現加群の概分裂列となることがAuslanderとCarlsonによって示されている。この事実を踏まえた上で、ARグラフの連結成分で自明な表現加群を含むものとトレース写像が分裂する表現加群とのテンソル積について考察した。得られた結果として、上述の条件(A)または(B)を満たすような表現加群を、自明な表現加群を含む連結成分にテンソルすれば、この表現加群を含む連結成分が構成されることを確認した。なお、条件(A)と(B)は同値なものではないが、結果を証明するための論法は、どちらの条件の仮定のもとでも併行して利用できるものであった。他方、係数環が2-モジュラー系の場合には、無限表現型のブロックにおいて、トレース分裂写像を含む連結成分は A 無限型であることを確かめることができた。

次に、ARグラフの連結成分で 高さが0の表現加群を含むものについて研究を進めた。なお、トレース分裂加群は高さが0の表現加群の典型的な例であり、また、高さ0の表現加群のソースは、トレース写像が分裂する表現加群であるが、このような表現加群を含むAR グラフの連結成分についてのこれまで成果を活かすことができた。以下ではLを高さ0の表現加群とし、SをLのソースとする。このとき、L および S は virtually irreducible という性質をもつので，L の概分裂列を制限すればSの概分裂列が現れ、逆に S の概分裂列を誘導すれば L の概分裂列が現れることが言える。このような考察から、Lを含むARグラフの連結成分の形状がA無限型であることと、Sを含む連結成分の形状

が A 無限型であることとが同値であることを導くことができた。特に、*S* を簡約化して得られるモジュラー表現加群が直既約ならば *S* の連結成分も形状は A 無限型であるので、*L* の連結成分も A 無限型であることが従う。また、この結果を導く過程において、*L* の連結成分に含まれる表現加群のヴァーテックスはすべて *L* のヴァーテックスに一致することも確認できた。AR グラフの連結成分から自然数への写像で additive function と呼ばれる関数が連結成分の形状を決定する上で重要な役割を果たすが、表現加群を簡約化したモジュラー表現加群の直既約分解の様子が additive function を構成する一つの方法を与えることも分かった。この事実は、一般の AR グラフの連結成分の形状を考察する場合にも非常に有効であるものと期待される。一方で、剰余体が標数 2 となるような完備離散付値環上の表現加群のカテゴリーにおいては，トレース写像が分裂する表現加群を含む連結成分の形状は A 無限型であるので、*S* の連結成分の形状は A 無限型であり，ひいては *L* の連結成分が A 無限型であることが分かった。さらに、*L* を簡約化して得られるモジュラー表現加群が直既約である場合にも注目した。このような性質を持つ表現加群の存在は Thompson により指摘されており、整数表現とモジュラー表現を関連づけるときに重要となるものである。この場合には、virtually irreducible に関連する事実を活用することで、*L* で終わる概分裂列の中間項が直既約となることが分かった。この事実は、*L* を含む AR グラフの連結成分において *L* はグラフの端点に位置することを意味し、従ってこのグラフの形状が A 無限型か又は D 無限型と呼ばれるもののどちらかになることが分かった。さらに、*L* のヴァーテックス *Q* の正規化群の *Q* による剰余群の位数が奇数という条件のもとでは、*L* のソース *S* を含む AR グラフの連結成分は A 無限型であることを導くことができ、結果として、*L* を含む AR グラフの連結成分は A 無限型であると証明することができた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① 河田成人，群環の高さ 0 の表現加群と Auslander-Reiten 連結成分について，数理解析研究所講究録 1872 巻「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究」(2014)，140-150，査読無

② Shigeto Kawata, On Auslander-Reiten components and splitting trace lattices for integral group rings, Journal of Algebra vol.359 (2012), 69-79，査読有

〔学会発表〕（計２件）

① 河田成人，群環の高さ 0 の表現加群と Auslander-Reiten 連結成分について，RIMS 研究集会「有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合せ論の研究」，2013 年 1 月 9 日，京都大学数理解析研究所

② 河田成人，群環の Auslander-Reiten 成分とテンサー積について，2011 年度日本数学会秋期総合分科会，2011 年 9 月 28 日，信州大学

６．研究組織

(1)研究代表者

河田　成人（KAWATA，Shigeto）

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：５０１９５１０３

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究

兼田　正治（KANEDA，Masaharu）

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：６０２０４５７５

馬場　良始（BABA，Yoshitomo）

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：１０２０１７２４