様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：２４６０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００５５

研究課題名（和文）非同型な自己正則写像を持つコンパクト複素多様体の研究

研究課題名（英文）A study of compact complex manifolds admitting non-isomorphic surjective endomorphisms

研究代表者
藤本　圭男（Fujimoto, Yoshio）

奈良県立医科大学・医学部・教授

研究者番号：９０１９２７３１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：小平次元が負の3次元射影代数多様体Xで自身への非同型エタール正則写像fを持つものの構造を研究した。Xの適当な不分岐被覆X'は６通りに分類される事を証明した。X'が単線維曲面と楕円曲線の積に分解できない類が多く存在する。端射線Rの収縮写像が双有理型の場合は別の多様体Yの楕円曲線に沿った爆発により得られる。難点はRがfの如何なる反復合成についても保存されず、極小モデル理論が自己正則写像の範疇で機能しない事による。DESPなる素性の良い不分岐正則写像の無限列を考察する事で困難を克服した。副産物として或る楕円繊維曲面上のコニック束が非同型なエタール自己正則写像を持つための判定条件を与えた。

研究成果の概要（英文）：We have studied structures of smooth projective 3-folds X with negative Kodaira dimension admitting non-isomorphic \'{e}tale endomorphisms. We can show that a suitable finite \'{e}tale covering X' of X is classified into 6 types. There exists some X where X' cannot be decomposed as a product of a uniruled surface and an elliptic curve. The contraction morphism associated to R is the inverse of a blow-up of another smooth 3-fold along an elliptic curve. The trouble is that R cannot necessarily be stabilized by a suitable power of f. Hence the minimal model program(MMP) cannot work so as to be compatible with endomorphisms. As a substitute, we consider the tower of non-isomorphic finite \'{e}tale covering of 3-folds (called ESP), on which MMP works well. Such a 3-fold X can be obtained as a succession of blow-ups along an elliptic curve from a characteristic ESP (called DESP). We can also give a simple criterion for certan conic bundles to have non-isomorphic \'{e}tale endomorphisms.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：自己正則写像　端射線　コニック束　半安定ベクトル束　楕円繊維曲面　楕円ファイバー空間　極小モデル計画

１．研究開始当初の背景

コンパクト複素多様体 X から自身への全射正則写像 f が自己同型写像でないとき、非同型な自己正則写像（endomorphism, 略称 endo）という。X が射影代数多様体ならば f は必然的に有限射、更に X の小平次元が非負ならば f は不分岐である。代数多様体の自己正則写像は基本的対象でありながら、代数幾何サイドでは、小平次元が負であるファノ等質空間（例えば、射影空間、グラスマン多様体）の場合に限って単発的に調べられているだけだった。それは主として Lazarsfeld 予想、即ちピカール数１のファノ等質多様体 Y から非特異代数多様体 X への非同型な全射正則写像が存在するならば、X は複素射影空間に限るか？という問題解決に向けての研究の副産物として Paranjape, Srinivas, E.Amerik, Beauville, Hwang&Mok, Cantat **達により為されてきた。他方、複素力学系では、主に射影空間や K３曲面上の非自明な自己正則写像が研究されてきた。そこでは多様体 X の構造より、その上の全射自己正則写像 f に対してその k 回の反復合成を考え、k を無限大に飛ばした際の写像の振る舞いの考察に重点を置く。更に複素力学系では、正則写像だけでなく自己有理写像も研究対象となる。例えばクンマー曲面という K３曲面は次数が２以上の自己有理写像を持つが、いかなる K3 曲面も非同型な自己正則写像を持たない。私は論文（**Endomorphisms of Smooth Projective 3-Folds with Nonnegative Kodaira Dimension, Publ. RIMS, 2002**）において、森理論（端射線の理論）と楕円ファイバー空間の理論とを駆使して、小平次元が非負の非特異３次元射影代数多様体 X で、非同型な自己正則写像を許す物の大方の記述に成功した: 即ち、X の適当な有限次不分岐被覆 Y は、或る非特異射影代数多様体 W 上の abelian スキームの構造を持ち、更に X の小平次元が 0, ２, 又は X の小平次元＝１で飯高ファイブレーションの一般ファイバーが超楕円曲面の時には、Y として非特異代数曲面 S と楕円曲線 E との直積か、或はアーベル多様体のいずれかがとれる事を証明した。上記の論文で唯一未解決であった場合（つまり、小平次元が１で飯高ファイブレーションの一般ファイバーがアーベル曲面の場合）も、中山昇氏（京大数理研）との共著論文**(Endomorphisms of smooth projective 3-folds with nonnegative Kodaira dimension, II, J. Math. Kyoto Univ. 47−1（2007）,79-114) **において解決した。更に以前の結果を精密化して、非同型な自己正則写像を持つ小平次元が非負の非特異３次元射影代数多様体の分類は理想的な形で完成した。**

２．研究の目的

本研究の目的は、非同型な自己正則写像を数多く持つコンパクト複素多様体の構造を複素多様体の分類論の視点から出来る限り具体的に調べることである。それは、楕円曲線やアーベル多様体,トーリック多様体を含むクラスであり，非常に簡明な構造を持つと予想される。私の研究目的は、非同型な自己正則写像を数多く持つコンパクト複素多様体の構造を複素多様体の分類論の視点から出来る限り具体的に調べることである。それは、楕円曲線やアーベル多様体,トーリック多様体を含むクラスであり，非常に簡明な構造を持つと予想される。我々の視点では、主役は多様体 X であって写像 f は単に脇役であり、自己正則写像 f の合成積を取る操作や自己同型写像と合成する操作により、自由に取り替えてよい。本研究では、主に小平次元が負の非特異３次元射影代数多様体で非同型なエタール自己正則写像を有するものを研究した。

３．研究の方法

毎週京大・数理研に出張して中山昇氏とセミナーを開き、代数多様体の自己正則写像について詳細な議論を重ねた。他方、国内の代数幾何学・研究集会にも参加して、資料収集等を行なった。

４．研究成果

(A) **複素多様体の分類論の視点から、小平次元が負の非特異３次元射影代数多様体 X で非同型なエタール自己正則写像(略称 endo)を持つものの構造を研究した。小平次元が非負な３次元射影代数多様体で非同型な endo を持つ多様体の構造は筆者と中山昇氏（数理研）との共同研究で完全に決定されていた。本研究はこの継続である。一般の設定では問題が難し過ぎる為、Endo が不分岐という仮定の下で研究した。先ず得られた結果を大雑把に述べる。**

主要結果：上のような多様体 X に対してその適当なエタールガロワ被覆 X’を取ると,

X’は６種類の型のいずれかに分類される。:

X’の典型的な類としては小平次元が負の非特異代数曲面と楕円曲線との直積が挙げられる。この類は小平次元が非負な場合の分類結果の類似物に相当する。残りの５種類は小平次元が負の場合に出現する新しい型であり、その記述は上例ほど単純でない。例えば楕円曲線上のランク３で次数０の分解不能・半安定ベクトル束に付随する射影束、及びそれらの切断を中心とする爆発(blow-up)により得られる多様体が該当する。

(B)次に分類方法の概略と分類の過程で得ら

れた結果を示す。非同型な自己正則写像を有する３次元射影代数多様体 X（小平次元に因らない）の標準束 K_X がネフでないとする。X の K_X-負な端射線 R が因子型（即ち、R の収縮写像πが双有理写像を与える）ならば、X は非特異射影代数多様体 X’上の楕円曲線 E を中心とする爆発により得られる事を森理論により証明した。同時に E の X’における法束はランク２、次数０の半安定ベクトル束となる事も示した。この主張は以前の論文の結果の精密化である。Atiyah により楕円曲線上のベクトル束の分類は為されている。特徴的な点は、E の法束は適当な底変換の下で自明または分 Atiyah の F_2 なるベクトル束のいずれか２種類に取れる点にある．この最後の主張は一般論から直ぐに従う訳でなく、多様体の分類課程における副産物として得られる。非同型な自己正則写像がエタールという仮定が本質的に用いられている。この定理を(X，ｆ) に適用して極小モデル・プログラム（MMP）を走らせることを試みた。次の定理が得られていた。
定理：R を非同型な自己正則写像 f: X→X を持つ射影代数多様体 X 上の K_X-負な端射線で、収縮写像が双有理でない（即ち X より次元の低い多様体の上の森・Fano ファイバー空間の構造を持つ）と仮定する。このとき、R はｆの適当な反復合成により保存される。:
故に R の収縮写像πが双有理型でない場合はｆ を適当な反復合成で置き換える操作により、ｆはπと両立し、底空間の非同型な自己正則写像を誘導する。非同型な自己正則写像を持つ曲面の分類は完成しているので、X の構造は容易に解析出来る。しかし、困難のひとつの要因として K_X-負な無限個の端射線 R を持つ多様体が存在することが挙げられる。このような R は因子型（つまり R の収縮写像が双有理正則写像）であり、ｆ の如何なる反復合成の下でも保存されない例が構成できる。従って R の収縮写像は自己正則写像を誘導するとは限らず、非同型な３次元射影代数多様体の間の非同型なエタール有限射の無限列を誘導するに過ぎない。X からスタートし有限回のブローダウンを施すことにより、ついには因子型の端射線を持たない非同型射影代数多様体、及びそれらの間の非同型なエタール有限射の無限列を得る。これを distinct etale sequence of constant Picard number (DESP)と命名した。従って X の分類方針は以下に帰着される：（い）先ず DESP の構造を決定すること、（ろ）次に逆のプロセス、即ち DESP に楕円曲線を中心とする爆発(blow-up)を有限回施して元来の多様体 X、及び非同型なエタール自己正則写像ｆを復元することの２点である。

(C)(い)に関しては森による３次元非特異射影代数多様体の端射線 R の分類定理が適用可能である。先ず、DESP の端射線 R が C 型、即ち R の収縮写像が非特異代数曲面上のコニック束の構造を与える場合を考察した。底曲面の上に非同型なエタール有限射の無限列が誘導される。これから、底曲面の可能性は３通りで、種数２以上の曲線と楕円曲線との直積、アーベル曲面、又は楕円曲線上のランク２の半安定ベクトル束に付随した射影束のいずれかである。次に R が D 型、即ち R の収縮写像が曲線上の Del Pezzo 曲面をファイバーとするファイバー空間の場合を考察した。楕円曲線上の Del Pezzo 曲面を典型ファイバーとするファイバー束となる事を示した。いずれの場合も底変換と有限回のブローダウンを施すことにより、X の DESP が射影束、又は P^1×P^1-束の場合に帰着出来る。（ろ）に関しては、DESP 上の楕円曲線で爆発の中心となるべきものの候補には非常に厳しい制約条件が課される。それらの楕円曲線を中心とする爆発を逐次重ねて、元の多様体 X と非同型自己正則写像ｆの大まかな構造が復元できる。

（D）しかし、DESP は単に非同型なエタール有限射の無限列であり、如何なる原理により DESP から元来の自己正則写像ｆが復元されるか？という疑問が残る：そこで X の大雑把な描像を手がかりに更に解析を進めた結果、X が非同型な自己正則写像をもつとき、大方の場合には X 上の端射線は高々有限個しか存在しないこと、たとえ無限個の端射線が存在する場合でもｆの有限回の反復合成で閉じるような端射線 R を見出すことが出来る。よって MMP は自己正則写像の範疇でうまく機能することが分った。再度 MMP を走らせて（C）の作業、即ち X の DESP を解析した上でと楕円曲線による爆発を遂行した。更に X が C 型でコニック束の底曲面が楕円繊維曲面 S となる場合、S は本質的に２種類であることも示された。この系として、(B）で述べた事実、つまり端射線 R の収縮写像の例外因子の型が本質的に２種類であることが従う。

（E）X が D 型の場合、その DESP は楕円曲線上の P^2-束、または P^1×P^1-束に還元される。よって我々の状況下では、Atiyah による楕円曲線上のベクトル束に関する分類結果が適用可能である。特に F_2 という分解不能・階数２の半安定ベクトル束が本質的に関与する。DESP 上の楕円曲線を中心とする爆発の作業も非常に明示的である。D 型の大半の場合 X のアルバネーゼ写像は楕円曲線 C 上のファイバー束の構造を与えることも示した。（A）から（E）の段階を踏まえて我々は主結果、即ち X が６通りに分類されることを示した。我々の分類は証明は長大であるものの、結果は非常に具体的である。

（F）楕円繊維曲面 S とその上の P^1-ファイバー空間 X が与えられたとき、X 上に非同型なエタール自己正則写像が存在するか否か？という疑問が生ずる。S の構造はエター

ル分岐被覆をとれば２種類に限定されることを証明した。それは主定理の副産物であるが、DESP とは無縁の形で定式化されており、X が非同型な自己準同型写像を持つための非常に簡単な判定条件を与えている。

この成果は論文にまとめ上げたたばかりである。約１６０頁と長大になった。いずれ投稿予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）
Étale endomorphisms of smooth projective 3-folds with negative Kodaira dimension (By Yoshio Fujimoto),
射影多様体の幾何とその周辺２０１１
高知大学シンポジューム報告集, 45-60.
(査読なし)

〔学会発表〕（計　4　件）
①Yoshio Fujimoto, Étale endomorphisms of smooth projective 3-folds with negative Kodaira dimension dimension. 研究集会：射影多様体の幾何とその周辺、２０１１年１１月３日、高知大学理学部
② Yoshio Fujimoto, Étale endomorphisms of smooth projective 3-folds with negative Kodaira dimension. 大阪大学・複素代数幾何セミナー、２０１１年１２月２７日
③ Yoshio Fujimoto, Étale endomorphisms of smooth projective 3-folds. 関西学院大学・アフィン代数幾何学研究会、２０１３年９月８日
④ Yoshio Fujioto, 射影代数多様体の上の自己準同型写像. 岡山大学・代数学放談会、２０１４年1月２８日

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等　　なし

６．研究組織

(1)研究代表者
藤本圭男　　(FUJIMOTO YOSHIO)

研究者番号：　９０１９２７３１

(2)研究分担者　　なし

(3)連携研究者　　なし