

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 17 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540058

研究課題名(和文) 対数的ホッジ・ドラームスペクトル列の退化と混合ホッジ構造の研究

研究課題名(英文) Degeneration of log Hodge-de Rham spectral sequences and mixed Hodge structures

研究代表者

藤澤 太郎 (Fujisawa, Taro)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：60280385

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：立方体的方法を用いて、ログ・デフォーメーションの相対対数的ドラーム・コホモロジー群上に混合ホッジ構造およびその偏極を構成した。単体的方法から立方体的方法へと修正を行うことにより、一般の対数的スムーズ退化の研究にも役立つものと期待される。

一方、対数的スムーズ退化の一典型例である、多重円板上のセミステイブルな射に関して、一般ファイバーから得られる純ホッジ構造の退化の様子を研究した。この純ホッジ構造を部分的に退化させる、すなわち多重円板の座標関数の幾つかだけを0にとばした極限を考察するとき、その極限混合ホッジ構造が、座標超平面の幾つかの交わりの上に混合ホッジ構造の許容変動を与えることを証明した。

研究成果の概要(英文)：By using cubical method, I constructed mixed Hodge structures and their polarizations on the relative log de Rham cohomology groups of a projective log deformation.

On the other hand, I considered a projective semistable morphism over a polydisc, which is a typical example of log smooth degeneration. I proved that the limiting mixed Hodge structures give us an admissible variation of mixed Hodge structures, when the pure Hodge structures on the relative de Rham cohomology groups of general fibers degenerate to an intersection of some of coordinate hyperplanes of the polydisc.

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：混合ホッジ構造 対数幾何学

1. 研究開始当初の背景

対数的スムーズ退化の一典型例であるログ・デフォメーションについて、その相対対数的ドラム・コホモロジー群上に、混合ホッジ構造およびその偏極が自然に構成されることが分っていた。これらの結果を一般の対数的スムーズ退化へと拡張することが、本研究の主眼であった。

(1) ログ・デフォメーション上の混合ホッジ理論

ログ・デフォメーションの相対対数的ドラム・コホモロジー群上に混合ホッジ構造が自然に構成されることは、スティーンブリックによって最初に示され、私と中山能力氏の共同研究により精密化された。さらに、私は対数的スムーズ退化の被約化に対して、これらの結果を拡張することに成功していた。

(2) ログ・デフォメーション上の偏極

さらに、平成 22 年度までの私の研究により上記の混合ホッジ構造が偏極を持つことが示されている。(ここで、混合ホッジ構造の偏極とは、ウェイト・フィルトレーションの各次数化それぞれに個別に定まるものではなく、コホモロジー群全体で定義され各次数化上ではモノドロミー作用と上手く両立し、さらにある種の正値性を持つような双線型形式のことである。)この偏極を構成するためには、相対対数的ドラム複体上に自然な積を定義すること、および対数的ドラム・コホモロジー群上のトレース射を適切に定義することが重要であった。

単体的方法

ログ・デフォメーションの相対対数的ドラム複体上に積を定義するためには、単体的 (simplicial) な方法が有効であった。この単体的方法は、単位円板上のセミスティブな退化に関するエル・ザインの研究をログ・デフォメーションの場合へと拡張したもので、実際は、より一般の対数的スムーズ退化について拡張されていた。

スペクトル列

一方、ログ・デフォメーションの相対対数的ドラム・コホモロジー群上にトレース射を定義するためには、スティーンブリックによって構成された複体のウェイト・フィルトレーションから定まるスペクトル列について、かなり複雑な計算を必要とする。すなわち、E1-項で自然に定義された「トレース射」が E2-項に降下することを示すため、E1-項の射と「トレース射」の関係を複雑な計算によって確認する作業が必要であった。

2. 研究の目的

これまでの研究成果を一般の対数的スム

ース退化へと拡張することにより、被約でない対数的スムーズ退化について次の二点を証明することが本研究の目的であった。

- 相対対数的ドラム・コホモロジー群は自然な混合ホッジ構造を持つ。

- 相対対数的ホッジ・ドラムスペクトル列は E1-項で退化する。

特に、相対対数的ドラム・コホモロジー群へのモノドロミー作用がべき単 (unipotent) である場合を主に考察する予定であった。

3. 研究の方法

モノドロミー作用がべき単である場合、ログ・デフォメーションについて得られた結果を、対数的スムーズ退化へと拡張することにより証明の手掛かりが得られるものと考えていた。すなわち、対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム複体上に自然な積を定義する一方、相対対数的ドラム・コホモロジー群上に自然なトレース射を定め、それらを用いて相対対数的ドラム・コホモロジー群上の混合ホッジ構造の偏極を定義する。これらにより、混合ホッジ構造に対する双対性を確立すると共に、柏原・河合のサンドウィッチ・メソッドを応用することにより、対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群上のホッジ・フィルトレーションをその被約化のホッジ・フィルトレーションと比較することが可能になるものと考えていた。

一方、一般の対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群をべき単の場合に帰着して研究するために、基底変換 (base change) の方法について検討することも視野に入れていた。

4. 研究成果

(1) 立方体的 (cubical) 方法

先述の様に、ログ・デフォメーションの相対対数的ドラム複体上に積を構成する際には単体的方法が有効であった。しかし、この方法を一般の対数的スムーズ退化に拡張することを試みたところ、単体的方法を用いることの困難さが明らかになってきた。単体的方法を用いるためには、ログ・デフォメーションの既約成分全体に全順序を一つ固定する必要がある。しかし、一般の対数的スムーズ退化の場合には既約成分の全体に一つ的全順序を固定することは適切ではない。なぜなら、多重円板をパラメータとする複素多様体の退化を一般化した対象である対数的スムーズ退化の場合、その既約成分は多重円板の各変数に応じた複数のインデックスを

持っているからである。その様な状況から、平成 23 年度はまず手始めに、ログ・デフォメーションに関して単体的方法を全面的に見直すことを試みた。すなわち、全順序を固定する必要がない立方体的 (cubical) 方法を用いて、それまでの結果を整理し直し必要な修正を行った上で、執筆中であった論文をそれに従って書き直した。プレプリント (arXiv:1305.4811) として公表し、現在投稿中である。

上記の立方体的方法が、対数的スムーズ退化の研究にも役立つものと期待していたが、状況は予想以上に複雑で、ログ・デフォメーションについて得られた結果を対数的スムーズ退化へと一般化することは非常に困難であることが判明してきた。

ログ・デフォメーションに対してトレース射を定義するためには、スティーンプリンクによって構成されたフィルトレーション付き複体から定まるスペクトル列を詳細に調べる必要があった。しかし、一般の対数的スムーズ退化上にホッジ理論を構築する際には、スティーンプリンクの方法は上手く機能せず、エル・ザインによる単体的方法を拡張することによって達成されていた。それ故、エル・ザインの単体的方法、或いは上記の立方体的方法によって構成されるフィルトレーション付き複体から定まるスペクトル列について、同様の計算を実行する必要が生じる。しかしながら、単体的あるいは立方体的方法から定まるスペクトル列の E1-項はスティーンプリンクによるものとは比較にならない程複雑で、同様の計算を実行することは極めて困難な状況であることが判明した。

(2) 多重円板上のセミスティブルな射

多重円板上のセミスティブルな射は、各点でのファイバーを考えることにより対数的スムーズ退化の例を与える。その意味で、多重円板上のセミスティブルな射は、ログ・デフォメーションとは対極にある対数的スムーズ退化の典型例であると考えられる。平成 24 年度、25 年度は視点を変え、多重円板上のセミスティブルな射に対するホッジ構造の退化について研究した。

一般ファイバーから定まる純ホッジ構造を部分的に退化させる (すなわち、多重円板の座標関数の幾つかを 0 へとばした極限を考察する) とき、現われる極限混合ホッジ構造が、座標超平面の幾つかの交わりの上に混合ホッジ構造の許容変動 (admissible variation) を与えることを証明した。この様に部分的な退化の様子を調べるためには、単に相対対数的ドラム複体の高次順像層を考えるだけでなく、(複数の) フィルトレーションを持った複体としての高次順像を考察することが重要である。その際、複数のフィルトレーションを持つ複体の部分解析空間への制限を考察する必要があり、複数

のフィルトレーションに関して次数化をとる操作と複体のテンソル積の可換性について非常に複雑な議論を重ねる必要がある。これらについては、京都大学の藤野修氏との共同研究の過程で得られた知見が役に立った。この成果は論文 Limits of Hodge structures in several variables, II として現在執筆中である。

(3) 今後の展望

ログ・デフォメーション上の混合ホッジ理論、および多重円板上のセミスティブルな射に関するホッジ構造の退化について幾つかの成果を得たものの、本来の研究目的である対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群の混合ホッジ構造については明確な成果が得られなかった。これは、対数的スムーズ退化という対象が持つ本質的な難しさに起因するものと考えられる。多重円板上のセミスティブルな射と比較するとき、対数的スムーズ退化は平坦ではない射の場合に相当し、代数幾何学における様々な手法を直ちに適用することができない。一方、先述したように、各既約成分が複数のインデックスを持つといった組み合わせ的な複雑さも、計算を難しくしている一因である。これらの困難をどう克服するか、今後の研究課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

O. Fujino, T. Fujisawa, M. Saito:
Some remarks on the semi-positivity theorems
Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, vol. 50, no.1, 2014, pp.85-112
査読有
DOI:10.4171/PRIMS/125

[学会発表](計 3 件)

藤澤太郎 :
Geometric log Hodge structures on the standard log point, II
ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」,
東京電機大学,
平成 25 年 8 月 5 日

藤澤太郎 :
Variations of mixed Hodge structures and semi-positivity theorems
ワークショップ「ホッジ理論と代数幾何学」,
東京電機大学,
平成 24 年 8 月 1 日

藤澤太郎：

Variations of mixed Hodge structures and
semi-positivity theorems

第7回鹿児島代数・解析・幾何セミナー

鹿児島大学

平成24年2月17日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤澤太郎 (FUJISAWA Taro)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：60280385

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし