科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号： ３２６６５
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2011～2013
課題番号： ２３５４００５９

研究課題名（和文）特異点の可換環論

研究課題名（英文）Commutative Ring Theory of Singularities of Algebraic Varieties

研究代表者
渡辺　敬一（WATANABE, Kei-ichi）

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：１００８７０８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円、（間接経費）　　1,110,000円

研究成果の概要（和文）：研究の目的は可換環論を特異点の理論に応用する事，また逆に可換環論の種々の性質を，特異点論の代数幾何的な言葉で記述し，幾何学的方法を用いて可換環論の成果を得る事だった.
この研究で得られた主な結果とは，1. F-pure 環の次元と埋め込み次元を与えた場合に重複度の上限を与えた. 2. ２次元の有理特異点の Ulrich ideal の分類を行った等，幾何学と可換環論との相互の関係をうまく使った成果を得ることができた. .

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to apply commutative ring theory to the study of singular points of algebraic varieties and, conversely, to express properties of commutative rings in terms of geometric language of singularities and analyze it.
Main results of this research are the followings; 1. Obtained upper bound of multiplicities of f-pure rings in terms of dimension and embedding dimension, 2. Described the quasi-socle ideals of parameter ideals using the tight closure theory of ideals of positive characteristic and got a bound, 3. Obtained the complete classification of Ulrich ideals in 2-dimensional rational singularities, 4. Characterized almost Gorenstein semigroup rings in affine 3-space in terms of its free resolution, 5. Obtained inequalities between a-invariant and F-pure threshold of homogeneous toric rings, 6. Determined when the jet schemes of a hypersurface have rational singularities.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード： 環論

１．研究開始当初の背景

高次元の代数幾何学で重要な位置を占める特異点の族として，有理特異点，端末特異点，対数的端末特異点，標準特異点，対数的標準特異点のクラスがあり，一方で，正標数の手法 (Frobenius 写像) を用いた可換環論において，F-rational, F-regular, F-pure などの環の族があり，標数 p への還元を用いてこれらが関係することがわかってきたところだった．また，正標数の可換環論でのテストイデアルの概念が解析的手法を用いた乗数イデアルの概念と対応することもわかって来たところだった．

また，lc (log canonical) threshold と F-pure threshold の対応についてもわかってきていた．一方，de Fernex-Ein-Mustata の正則局所環における，イデアルの lc threshold と重複度の関係は大変神秘的かつ魅力的なものであった．この結果に触発されて，Mustata-Takagi-Watanabe がイデアルの組に対する F-threshold の概念を提唱し，lc thereshold の概念を相対化し，それに伴い，2 つのイデアルの重複度の関係を F-threshold を用いて記述する不等式に関する予想が Huneke-Mustata- Takagi –Watanabe によって提唱された．

また，Frobenius 像の分解を記述する F-signature の概念もいくつかの例に対して記述されていたところだった，

２．研究の目的

本研究の目的は前項で述べたような種々の特異点の性質を可換環論的手法を用いて解析すること，また，逆に，可換環という代数的に定義された対象に代数幾何という幾何学的手法を導入することにより，さまざまな概念を「視覚化」して幾何学的観点を導入することであった．

３．研究の方法

数学の研究において様々な観点の研究者たちと情報，視点を交換し，討論して新しい視点，手法を生み出すことの意義はきわめて大きい．

本研究においても，費用のかなりの部分を国内，国外の研究集会への参加に用いた．

特に，2013 年前半の Berkeley MSRI（高等数学研究所）での commutative algebra special year への参加, 2011 年の Purdue 大学での Midwest Commutative Algebra and Geometry Conference，2012 年の Rio de Janeiro における 12th ALGA meeting，2013 年の France CIRM における，COMMUTATIVE ALGEBRA AND ITS INTERACTION WITH ALGEBRAIC GEOMETRY，国内では毎年の可換環論シンポジウムへ等の種々の研究集会への参加は，研究成果を発表し，またそこからフィードバックを受けて次の段階へ進むために大変大きな役割を果たしている．

また，毎月日本大学文理学部において開催される「特異点論月曜セミナー」も研究の発展に大変大きな役割を果たした．

共同研究を行った相手としては，研究分担者の吉田健一教授，連携研究者の蔵野和彦教授，高木俊輔准教授の他に山形大学の奥間智弘教授，Virginia 大学の Craig Huneke 教授，明治大学の後藤四郎教授，東京大学の石井志保子教授，学振の三内顕義研究員，日本大学大学院の成博勝氏，沼田崇宏氏などが挙げられる．

４．研究成果

(1) F-threshold と関連した結果

F-threshold に 関する重複度の不等式について，次数付き環の斉次元で生成されたイデアルの組に対して，重複度の不等式が証明された．また，この不等式の成立と，整閉イデアルとパラメーターイデアル，イデアルの core の包含関係が同値であることが示された．([9])

(2) n 変数 d 次斉次式で斉次式で定義される特異点のすべての Jet scheme が有理特異点をもつとき．n > d^2 であることを示した ([7])．

(3) 3 元生成の半群が pseudo-symmetric となるための必要十分条件をその半群環の自由分解を用いて与えた([8])．

(4) d 次元局所環のパラメーターイデアル J に対して，J: (J の整閉包) を正標数のテストイデアルを用いて記述した([6])．

(5) Cohen-Macaulay 環の Ulrich ideal，Ulrich module の概念を定義し，2 次元の有理特異点上の Ulrich ideal を特異点の解消上のサイクルを用いて完全に記述した([4])．

(6) F-pure 環，有理特異点に対して，次元と埋め込み次元を与えたときに．重複度の上限を与え，いくつかの場合に上限を取るための条件を記述した．

(7) 2 次元の孤立特異点をもつ次数付き超曲面 k[X,Y,Z]/(f) で与えられた正の a 不変量をもつもののタイプは有限個であることを示し，a <= 6 に対して，すべてのタイプを与えた([2])．

(8) 2 次元正規局所環の整閉イデアルの理論を構築した．これは現在研究が進行中なので，間もなく論文の最終稿が出来上がる段階だが，いくつかの学会で発表し，好評を得ている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　11　件）

１．高木俊輔・渡辺敬一， F 特異点 -- 正標数の手法の特異点論への応用，「数学」(日本数学会),査読有,66 巻 (2014), 1-30.

2. Kei-ichi Watanabe, Classification of 2-dimensional normal graded hypersurfaces with a(R) ¥le 6, Proceedings of the 2012 Conference at IMPA, 査読有, To appear.

3. Craig Huneke,. Kei-ichi Watanabe Upper bound of multiplicity of F-rational rings and F-pure rings, Proc. American Mathematical Soc., 査読有, To appear.

4. S. Goto, Kazuho Ozeki,, Ryo Takahashi, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi . Yoshida,, Ulrich ideals and modules, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読有, vol. 156 (2014), 137--166.

5. Daisuke Hirose, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi . Yoshida, F-thresholds vs. a-invariants for homogeneous toric rings, Communications in Algebra, 査読有, vol 42 (2014), 2704—2720.

6. Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi . Yoshida, A variant of Wang's theorem, J. of Algebra, 査読有, vol. 369 (2012), 129-145

7. Shihoko Ishii, Akiyoshi Sannai, Kei-ichi Watanabe Jet schemes of homogeneous hypersurfaces, "Singularities in Geometry and Topology, Strasbourg 2009" , 査読有, 39-49, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 20, European Mathematical Society, 2012.

8. Hirokatsu Nari, Takahiro Numata, Kei-ichi Watanabe, Genus of numerical semigroups generated by three elements, J. of Algebra, 査読有, vol. 358 (2012), 67-73.

9. Craig Huneke, S. Takagi, Kei-ichi Watanabe, Multiplicity bounds in graded rings, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, vol. 51 (2011), 127--147

10. Akiyoshi Sannai, Kei-ichi Watanabe, F-signature of graded Gorenstein rings, J. Pure and Appl. Algebra, 査読有, vol. 215 (2011), 2190-2195.

11. Satoshi Ohnishi, Kei-ichi Watanabe, Coefficient ideal of ideals generated by monomials, Communications in Algebra, 査読有, vol. 39 (2011), 1563-1576.

〔学会発表〕（計　10　件）

1. **Kei-ichi Watanabe, Good ideals of 2-dimensional normal singularities, "International Conference on Commutative Algebra and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics", 2013. 12.9, Institute of Math., Hanoi.**

2. **Kei-ichi Watanabe,, Good ideals of 2-dimensional normal singularities, COMMUTATIVE ALGEBRA AND ITS INTERACTION WITH ALGEBRAIC GEOMETRY, 2013.7.10, CIRM, France.**

3. Kei-ichi Watanabe,, Existence of good ideals in 2-dimensional normal Gorenstein rings, Commutative Algebra Seminar, 2013.3.14, MSRI, UC Berkeley.

4. 吉田健一・渡辺敬一, Ulrich modules and Special modules over 2-dimensional rational singularities, 「第45回環論および表現論シンポジウム」, 2012.9.8, 信州大学.

5. Kei-ichi Watanabe,, On Ulrich ideals and modules, II, 12th ALGA meeting,

2012.8.16, IMPA, Rio de Janeiro.

6. Kei-ichi Watanabe, The upper bound of multiplicity of F-pure rings and rational singularities, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2011.12.13, Quy Nhon University, Vietnam.

7. 渡辺 敬一, Upper bound of multiplicity of F-rational and F-pure rings, 第33回可換環論シンポジウム, 2011. 11.9, 浜名湖カリアック

8. 吉田 健一, 渡辺 敬一,
11/8 トーリック環上の F-thresholds, 第33回可換環論シンポジウム, 2011.11.8, 浜名湖カリアック （吉田健一氏との共同発表)

9. 渡辺 敬一, Certain Jet Schemes have Rational Singularities, 特異点論とそのひろがり
2011.8.24, 京都大学

10. Kei-ichi Watanabe, Certain Jet Schemes have Rational Singularities, Midwest Commutative Algebra and Geometry Conference, 2011.5.15, Purdue University;

〔図書〕（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
渡辺 敬一（WATANABE Kei-ichi）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：1087083

(2)研究分担者
吉田 健一 （YOSHIDA Ken-ichi）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：80240802

(3)連携研究者
蔵野 和彦 （KURANO Kazuhiko）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90205188

高木 俊輔（TAKAGI Shunsuke）
東京大学大学院・数理科学研究科・准教授
研究者番号：40380670