

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：32682
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2011～2016
課題番号：23540060
研究課題名(和文) 多項式環における単項式イデアルの特性

研究課題名(英文) Monomial ideals in polynomial rings

研究代表者

中村 幸男 (Nakamura, Yukio)

明治大学・理工学部・専任教授

研究者番号：00308066

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、単体的複体から定まる代数であるStanley-Reisner環を中心として、単体的複体の持つ離散数学的な性質とStanley-Reisner環の持つ代数的な性質の関連を調査することを目的としたものである。
成果としては、Stanley-Reisner イデアルの通常べき、及び記号的べきによる剰余環のk-Buchsbaum性に関するものがある。

研究成果の概要(英文)：The purpose of the research is to investigate the relation between the property of simplicial complexes in Discrete Mathematics and that of Stanley-Reisner rings in Commutative Algebra.
As a result, we characterize the k-Buchsbaum property of the residue class rings of the polynomial ring by the power of Stanley-Reisner ideals.

研究分野：可換環論

キーワード：単項式イデアル Stanley-Reisner 環 Lefschetz 性 Cohen-Macaulay グラフ 随伴次数環 三角圏
導来圏

1. 研究開始当初の背景

体 K 上の Stanley-Reisner 環 $K[\]$ (は単体的複体) は K 上の多項式環を Stanley-Reisner イデアル I という単項式イデアルで剰余した環のことである。単体的複体は離散数学における組み合わせ論で扱われる対象であり、 の離散数学的な性質を用いて $K[\]$ の代数的な性質を記述するという試みは 1970 年ころから盛んに行われるようになった。それ以降現在に至るまで多くの研究成果が発表されているが、2000 年代から、多項式環を I のべきで剰余した環 (拡張 Stanley-Reisner 環と呼ぶことにする) の性質を研究する動き、及び単体的複体 がグラフ G から定まる複体 (flag complex) のときに Stanley-Reisner 環の性質をグラフの性質で記述するという動きが出てきた。

2. 研究の目的

- (1) 多項式環を Stanley-Reisner イデアル I の「通常べき (ordinary power) I^t 」あるいは「形式的べき (symbolic power) $I^{(t)}$ 」で剰余して得られる拡張 Stanley-Reisner 環の研究において、Cohen-Macaulay 性、及び Buchsbaum 性についての研究には決着がついている。次に調査すべき対象として Buchsbaum より弱性質である k -Buchsbaum 性について調べる。
- (2) グラフ G から定まる Stanley-Reisner 環 $K[G]$ の性質として Cohen-Macaulay 性についてはグラフの形状で特徴づけができることが分かっている。そこで Cohen-Macaulay より弱い列性 Cohen-Macaulay 性や Buchsbaum 性についての調査を行う。
- (3) 環の Lefschetz 性は代数的に定まる概念だが、本来は組み合わせ論の問題から生じたものである。その解析には可換環論、組み合わせ論のみならず代数幾何学、表現論など多岐にわたり、Stanley-Reisner

環とも関係が深い。そのような動機から体 K 上の次数付 Artin 代数における Lefschetz 性について調査をする。

- (4) 昨今の可換代数の研究の一つの流れとして、可換環を圏論的見地から研究することが盛んに行われている。本研究テーマとの関連として Stanley-Reisner 環上の加群のなす圏、及びその導来圏に対し、単体的複体を用いた離散数学的な特徴づけを与えることは重要と考える。そのような動機から、体 K 上の Artin 代数の表現論についての調査をする。

3. 研究の方法

- (1) 拡張 Stanley-Reisner 環の研究にあたっては、ベトナムのハノイ教育大学の Minh 教授との共同研究を行った。Minh 氏とは数年に渡りこれに類するテーマで共同研究を行ってきており、「通常べき」と「形式的べき」に関する拡張 Stanley-Reisner 環の Buchsbaum 性についての結果を得た。今回はその延長として k -Buchsbaum 性に取り組んだ。
- (2) グラフから定まる Stanley-Reisner 環 $K[G]$ が列性 Cohen-Macaulay 性となるための条件をグラフの言葉で記述することを目標とする。また、2 部グラフと完全多部グラフの自然な拡張である概多部グラフに着目してその Stanley-Reisner 環の調査をする。
- (3) Lefschetz 性に関するテーマの一つである「完全交差は強 Lefschetz 性を有するであろう」という未解決問題に着目し、随伴次数環を経由した考察として、問題を次の 2 つ「基礎環が完全交差ならば適当なイデアルを選ぶことでその随伴次数環が強 Lefschetz 性を持つようにできる」と「随伴次数環が強 Lefschetz 性を持てば基礎環もそれを持つ」に分割して考察をした。

(4) Stanley-Reisner 環を圏論的立場から考察するために必要な知識として、三角圏、導来圏、導来関手に関する理論、及び表現論に関する知識として、クイバー、概分裂列、AR クイバー、tilting に関する理論を整理し応用していく。

4. 研究成果

(1) 拡張 Stanley-Reisner 環の k -Buchsbaum 性について、通常べきの場合と形式的べきの場合でそれぞれ調査した。一般に k -Buchsbaum 性は Buchsbaum 性より弱く、Buchsbaum 性は Cohen-Macaulay よりも弱い性質である。本研究で得られた結果について、まず通常べきの場合にはひとたび k -Buchsbaum 性が十分大きい通常べきで成立すると、実は任意のべきで Cohen-Macaulay 性が成り立ってしまい、Stanley-Reisner イデアルも完全交差となることが分かった。具体的に述べると次の形になる。 S を多項式環、 $I=I$ とする場合、次が同値である。

S/I^t はすべての $t > 0$ で Cohen-Macaulay

S/I^t はすべての $t > 0$ で k -Buchsbaum

S/I^t はある $t > \max\{2, k\}$ で k -Buchsbaum

Stanley-Reisner イデアル I は完全交差となる

続いて、Stanley-Reisner イデアル I の形式的べきをとった場合について述べる。形式的べきの場合もひとたび k -Buchsbaum 性が十分大きい形式的べきで成立すると、実は任意のべきで Cohen-Macaulay 性が成り立つことが言え、さらには単体的複体がマトロイドになることが判明した。具体的には次の同値命題となる。

$S/I^{(t)}$ はすべての $t > 0$ で Cohen-Macaulay

$S/I^{(t)}$ はすべての $t > 0$ で k -Buchsbaum

$S/I^{(t)}$ はある $t > k+2$ で k -Buchsbaum 単体的複体 はマトロイドとなる

本研究で得られた成果は論文として発表した。

(2) グラフから定まる Stanley-Reisner 環の Cohen-Macaulay 性、及び列性 Cohen-Macaulay 性の研究は大学院博士後期課程の学生である東平光生氏との共同研究として行った。Herzog-Hibi は Cohen-Macaulay グラフ (Stanley-Reisner 環が Cohen-Macaulay となるグラフ) を視覚的に判定する方法をグラフ G が 2 部グラフの時に与えており、その手法を参考に列性 Cohen-Macaulay ではどう記述できるかについての研究を行った。得られた結果は、概完全グラフ (2 部グラフや多部グラフを包含するの概念) を導入することにより、今までより広い範囲での Cohen-Macaulay 性、及び列性 Cohen-Macaulay 性を視覚的に判定することが可能となった。さらに、Stanley-Reisner 環の正則数の計算方法にも有効な方法を与えることとなった。結果の一部は東平氏の博士論文として発表した。ほかの結果についてははしかるべき時期に論文として発表する予定である。

(3) 基礎環となる次数付 Artin K -代数 A とその中の斉次イデアル I を一つ固定して、随伴次数環 G をとり、随伴次数環が強 Lefschetz 性を持つ必要十分条件を基礎環 A が強 Lefschetz 性を持ちイデアルがある条件を満たすことと同値であることを証明した。具体的には I の元 x に対し

G が強 Lefschetz 元 x^* をもつ

A が強 Lefschetz 元 x をもち、

$I^n (x^k) = x^k I^{n-k}$ ($k < n$) を満たす

の 2 条件が同値であることを示した。本

研究は当時研究室に所属していた大学院生の川村匡弥氏とともに研究を行う。研究成果は川村氏の修士論文に記載した。本研究は現在、完全交差との関係について進行中であり、しかるべき時に学術論文として発表する予定である。

- (4) Stanley-Reisner 環の圏論的方面からの研究については、まだ理論の勉強中であり具体的な成果は出ていない。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Nguyen Cong Minh and Yukio Nakamura, On the k -Buchsbaum property of powers of Stanley-Reisner ideals. Nagoya Math. J. 査読有、vol. 213 (2014), 127-140.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村幸男 (NAKAMURA, Yukio)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：00308066

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

Nguyen Cong Minh

東平光生 (HIGASHIDAIRA, Hirotaka)

川村匡弥 (KAWAMURA, Masaya)