様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：５８００１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００６４
研究課題名（和文）森田双対性をもつアルチン環の研究

研究課題名（英文）Study of artinian rings with Morita duality

研究代表者
小池　寿俊（Koike, Kazutoshi）

沖縄工業高等専門学校・総合科学科・教授

研究者番号：２０２２５３３７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円、（間接経費）　780,000円

研究成果の概要（和文）：環の森田双対性に関する重要な問題として、東屋の予想「すべてのexact環は自己双対性をもつであろう」がある。このexact環と密接な関係がある、環の有限三角拡大について、以前から基礎環の森田双対性が遺伝することは知られていたが、本研究において、対応する森田双対な環も有限三角拡大となるという結果を得た。また、斜体上のある種の有限三角拡大は自己双対性をもつことを示した。これらの結果は東屋の予想の傍証を与えるものである。

研究成果の概要（英文）：Azumaya's conjecture "every exact ring has a self-duality" is an important problem in the study of Morita duality of rings. For finite triangular extensions , which are closely related to exact rings, it is well-known that these ring extensions inherit Morita duality from base rings. In the study, we show that finite triangular extensions are Morita dual to finite triangular extensions. We also prove self-duality of certain finite triangular extensions of division rings. These results provide supporting evidence for Azumaya's conjecture.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：森田双対性　自己双対性　東屋の予想　拡大環　有限三角拡大

１．研究開始当初の背景

（１）森田同値の双対概念にあたる環の森田双対については、古くから多くの研究者によって調べられてきた。とりわけ、どのような環が自己双対性をもつかという問題は研究者の興味をひいてきた。この分野には、東屋の予想「すべての exact 環は自己双対性をもつであろう」をはじめとして、多くの未解決で重要な問題が残されている。研究代表者は、近年多くの研究者によって活発に研究されている、QF 環や serial 環と密接な関係のある、ある種のアルチン環である原田環や準原田環の森田双対性の研究を行い、それまで不明だった原田環の自己双対性について、必ずしも自己双対性をもたないことや、その一方で必ず概自己双対性（自己双対性のある種の一般化）をもつことを証明する等、さまざまな結果を得ていた。また、その研究や手法を応用することにより、局所分配的片側 serial 環は自己双対性をもつ、局所分配的片側 QF-2 環は概自己双対性をもつ、等の東屋の予想に関するいくつかの肯定的な結果を得ていた。

（２）東屋の予想を解決するための端緒とも考えられ、exact 環と密接な関係がある有限三角拡大や有限正規拡大に対しては、基礎環の森田双対性が遺伝することは知られていたものの、対応する森田双対な環がどのような拡大環かは分かっていなかった。しかし、東屋の予想の観点からは、基礎環が自己双対性をもつ場合は、有限三角拡大や有限正規拡大も自己双対性もしくはそれに近い森田双対性をもつことが期待されていた。

２．研究の目的

森田双対性をもつ非可換アルチン環について、自己双対性を中心に研究を行う。特に、重要な未解決問題である東屋の予想「すべての exact 環は自己双対性をもつであろう」の解決を目指し、ある種の条件の下では、東屋の予想が肯定的なこと、すなわち exact 環や関連する環における自己双対性やそれに類する森田双対性の存在を示すことを目的とする。

３．研究の方法

（１）先行研究や関連研究を精査・分析する。そのため、関連する学術図書を購入し、利用した。また、机上の計算により、環の森田双対性や自己双対性について、東屋の予想を中心に森田双対性や自己双対性を検証した。特に、斜体の有限三角拡大の自己双対性については、そこで現れる斜体の自己同型写像や微分に関する具体的な計算を行った。

（２）日本数学会年会・分科会、環論および表現論シンポジウム、代数学シンポジウム等の研究集会に参加することにより、近接研究者による周辺分野の最新の研究成果を吸収するとともに、意見交換を行った。

（３）研究分担者の大城氏とは通常電子メールによって研究の進捗状況の確認を行った。また、研究集会だけでなく、氏が研究代表者の所属研究機関に出張することにより、研究打ち合わせを行った。

（４）２０１２年に開催された第４５回環論および表現論シンポジウムにおいては、プログラム責任者としてプログラムを策定するとともに、報告集を出版した。

４．研究成果

（１）一般に、環の森田双対性や自己双対性の研究においては、基礎環のそれがどのように拡大環に遺伝するかが重要な問題となる。また、東屋の予想に現れる exact 環は、有限三角拡大、有限正規拡大と呼ばれる拡大環と密接な関係がある。Mueller によって、A が森田双対性をもつ環のとき、A のある種の拡大環も森田双対性をもつことは示されていた。より詳しくは、U が森田双対性を定める(B,A)両側加群のとき、A の拡大環 R について、R が右 A 加群として linearly compact で、U による右 A 加群 R の双対 $\mathrm{Hom}_A(R,U)$ も右 A 加群として linearly compact のとき、A の拡大環 R は、B の拡大環 $S=\mathrm{End}_R(\mathrm{Hom}_A(R,U))$ と森田双対となる。

しかしながら今までは、このような R と S は単なる対応としてしか知られていなかった。研究代表者は、この R と S の対応は、A のある種の拡大環の圏と B のある種の拡大環の圏との間の圏同値を与えることを示した。ここで、$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(-,U),U)$ が圏同値を与える関手である。従来の $S=\mathrm{End}_R(\mathrm{Hom}_A(R,U))$ としての扱いでは S が環であることは明らかなものの、実際の積構造を調べることは容易ではなかった。これを $S=\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(R,U),U)$ と見なすことにより、S の積構造を具体的に調べることが容易になった。この結果自体は以前から着想を得ていたものであるが、今回の研究において、より精密化し周辺の結果も整備した。例えば、環 A と B が森田双対で、これらの拡大環 R と S が上で述べた意味で対応するとき、これらの拡大の中間環 R’ と S’ は零化加群によって対応することを証明した。これにより、今まで別々に証明されていた拡大環の森田双対性に関するいくつかの結果が統一的に従うことも分かった。

また、上の結果を応用することにより、東屋の予想と密接な関係がある有限三角拡大や有限正規拡大への森田双対性の遺伝に関する結果を得ることができた。すなわち、A と B が森田双対のとき、環 A の有限三角拡大（有限正規拡大）R についても、以前から上

述の Mueller の結果により、R は B のある拡大環 S と森田双対であることは知られていたが、S が B のどのような拡大環であるかは分かっていなかった。今回の研究において、S は B の有限拡大（B 加群として有限生成）であること、特に A と B が基本的であれば、S は B の有限三角拡大（有限正規拡大）であることを証明した。したがって、A の有限三角拡大環（有限正規拡大環）の圏と B のそれとは、圏同値であることが分かった。

A が斜体や半単純環の場合、A の有限三角拡大（有限正規拡大）の多くは exact 環となる。したがって、東屋の予想によれば、A の有限三角拡大（有限正規拡大）は自己双対性をもつことが期待される。上で述べた結果を、特に A が自己双対性をもつ基本的環の場合に適用すると、A の有限三角拡大（有限正規拡大）R は、A の有限三角拡大（有限正規拡大）S と森田双対であること分かる。R と S が同型の場合が自己双対性であるから、それを示すことはできなかったものの、同じ型の拡大であることが分かったことは、R の自己双対性、ついては東屋の予想の根拠を与えるものである。これらの結果については、雑誌論文①に掲載されるとともに、学会発表①において発表した。

（２）斜体の自己同型写像と微分によって構成される有限三角拡大の自己双対性を研究した。A を斜体、R を A の有限三角拡大とする。このとき、R は右 A 加群としてのある種の基底 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ をもつが、各 r_i に対して、A の元を左からかけたものを、$r_1, r_2, \cdots, r_n$ の右１次結合として表現するために、A の自己同型写像と微分（正確にはより一般化したもの）の族 $\delta_{ij}(1 \leqq i, j \leqq n)$ が現れる。（δ_{ii} が自己同型写像であり、$\delta_{ij}(i \neq j)$ が微分である。）（１）でも述べた斜体 A の有限三角拡大 R の自己双対性を一般的に示すためには、δ_{ij} に制約条件を置かずに証明することが最良である。

現時点では、計算途中であるものも多いが、δ_{ij} がある種の条件を満たす場合に、自己双対性を示すことができた。すなわち、δ_{ij} が２条件　(ｉ) δ_{ij} は写像として互いに可換である、(ⅱ) $\delta_{ij}(i \neq j)$ は基底 r_i に関する積の構造定数を 0 に写す、を満たすとき、R は自己双対性をもつ。これは、「斜体の有限正規拡大は自己双対性をもつ」という Kraemer による結果の類似と見なせる。

また、より具体的な次元が小さい有限三角拡大 R の自己双対性も考察した。最も基本的な R の Loewy length が 2 の場合に相当するのは、斜体 A と（有限三角拡大の条件と同様な基底をもつ）両側 A 加群 M によって定義される、A の M による自明拡大 R である。さらに M の A 加群としての次元が 2 の場合、M は A の２つの自己同型写像 α、β と (α, β) 微分 δ によって決まる。このような場合の R の自己双対性の検証を試み、α、β、δ がある種の条件を満たすときには自明拡大 R は自己双対性をもつことを示した。特に斜体 A が中心上有限次元のとき α、β、δ は条件を満たすので、R は自己双対性をもつことが分かった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① K. Koike, Morita duality and ring extensions, J. Algebra Appl. 12 (2013), No. 2, Paper No. 1250160, 23 p. DOI: 10.1142/S0219498812501605, 査読有り

② 小池寿俊,「(書評) Y. Baba and K. Oshiro: Classical Artinian Rings and Related Topics」, 数学(日本数学会), 第 64 巻 (2012), 432-436, 査読無し

③ I. Kikumasa, K. Oshiro, H. Yoshimura, A construction of local QF rings and its characterization, Comm. Algebra 40 (2012), no. 12, 4639–4660, 査読有り

④ K. Oshiro, On the faith conjecture, Contemporary ring theory 2011, 155–164, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012. 16, 査読有り

〔学会発表〕（計２件）

① 小池寿俊、森田双対性と有限環拡大、日本数学会秋季総合分科会代数分科会, 九州大学, 2012 年 9 月

② K. Oshiro, On the Faith conjecture, 6th China-Japan-Korea International Conference on Ringh Theory (招待講演), Kyung Hee Univ., Korea, 2011 年 7 月

〔図書〕（計１件）

① K. Koike (編集), Proceedings of the 45th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 環論および表現論シンポジウム実行委員会, 2013 年 2 月

６．研究組織

(1)研究代表者

小池　寿俊　　　(Kazutoshi Koike)
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・教授
研究者番号：20225337

(2)研究分担者
大城　紀代市　（Oshiro Kiyoichi）
山口大学・名誉教授・大城紀代市
研究者番号： 90034727

(3)連携研究者
なし