科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４００６５

研究課題名（和文）微分式系の幾何学とパラボリック幾何学の研究

研究課題名（英文）Research on geometries of Differential Systems and Parabolic geometries

研究代表者
山口　佳三（Yamaguchi, Keizo）

北海道大学・－・総長

研究者番号：００１１３６３９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円、（間接経費）　　1,170,000円

研究成果の概要（和文）： 微分式系の概念を通じて、２階１未知関数偏微分方程式系を幾何学的に研究する「二階接触幾何学」を２階のPD多様体の幾何学として定式化した。さらに、この幾何学において、基本的である二段階の「簡約化定理」を確立した。
　この「簡約化定理」を応用して、パラボリック幾何学（すなわち、単純階別リー環に付随する幾何構造の幾何学）に帰着される多くの二階過剰決定系のクラスの例の具体的な構成法を明示した。

研究成果の概要（英文）： We established the notion of PD-manifolds, which describes, through the concept of differentail systems, the geometry of systems of second order partial differential equations for one unknown function under contact transformations. Moerover we established two step Reduction Theorem, which is basic to Contact Geometry of Second Order.
By utilizing this Reduction Theorem, we explicitly show how to construct various classes of overdetermined systems of second order partial differential equations, for which the contact equivalence problems are reduced to that of Parabolic Geometries(i.e., the geometries associated with the simple graded Lie algebras).

研究分野： 微分幾何学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 接触幾何学　微分式系　階別単純リー環　包合系

１．研究開始当初の背景

研究代表者は、これまでの基盤研究等を通じて、接触幾何学を背景に微分方程式系の接触幾何学的研究を提唱し、その課程で微分方程式系をジェット空間の部分多様体として捉え、これを研究対象として幾何学的な手法で研究してきた。この際、微分方程式系の接触変換による同値問題を、PD 多様体の幾何学として定式化してきている。本研究課題は、これを基に、微分式系に関する「田中理論」を応用してこの分野の研究を深化させることを意図して開始した。

２．研究の目的

この研究の目的は大きく分けて２つからなる。１つは、微分式系の概念を通じて二階１未知関数偏微分方程式系を幾何学的（接触幾何学的）に研究することであり、もう一つは、パラボリック幾何学（すなわち、階別単純リー環に付随する幾何構造の幾何学）の研究と、その前者への応用を諮ることである。

最初の課題は、微分方程式系をジェット空間の部分多様体として、幾何学的対象ととらえて、接触同値問題を核に研究することである。第二の課題は、パラボリック幾何学（すなわち、階別単純リー環に付随する幾何構造）に対して、田中昇氏によって構成された Normal Cartan 接続理論のより詳細な構造解明とその応用および発展を諮ることである。さらに、この両者の研究が融合する接点を命じして行くことを意図している。

当初は、以下の４つの諸課題を柱として研究を進め、具体的には、下記２つを主要課題とした。

●諸課題

（１）二階－未知関数偏微分方程式系の接触同値問題、特に G_2－型偏微分方程式系の研究の発展と二階の PD－多様体に対する Reduction 課程の整備。さらに Reduction を通してのパラボリック幾何学（階別単純 Lie 環に付随する幾何構造）との関連の解明。

（２）Monge－Ampere 方程式の解の特異点と衝撃波の構成。特に二階の PD－多様体の構造の退化との関連。

（３）微分方程式系の symbol より生じる階別 Lie 環の研究および高階有限型微分方程　式系（完全積分可能系）の同値問題、およびそれらと階別単純 Lie 環に付随する幾何構造との関連。

（４）線形高階有限系微分方程式系の同値問題の射影部分多様体論と Gauss－Schwarz 理論への応用、および、その接触幾何学的類似の構成。

●主要課題

（１）二階一未知関数偏微分方程式系の接触同値問題

（２）2-stepgradation を持つパラボリック幾何学の具体的構造解明

３．研究の方法

上述した２つの主要課題に対して、その研究の方法を述べる。(１) の課題は、E.Cartan の研究を発展させるものであって、二階の偏微分方程式系を幾何学的には２－ジェットの空間の部分多様体として、微分式系のことばで特徴付けを行って研究する。その基本部分は、すでにこれまでの基盤研究等による研究で「二階の PD 多様体の理論」として定式化している。今回の研究では、その核心部分である２段階の簡約化定理を微分式系の幾何学のことばで定式化することがテーマである。(２) の課題は、パラボリック幾何学の基本的な課題であり、佐藤肇氏との共同研究として遂行する。

４．研究成果

この研究の目的は、大きく分けて２つからなる。１つは、微分式系の概念を通して、微分方程式系を幾何学的（接触幾何学的）に研究することであり、もう１つは、パラボリック幾何学（すなわち、単純階別リー環に付随する幾何構造）の研究であり、その前者への応用を諮ることである。

平成 23 年度は、二階の接触幾何学における Second Reduction Theorem の定式化を行い、それを Contact Geometry of Second OrderⅡなる題目のもとで論文としてまとめる準備を行った。この簡約化定理は、E.Cartan の２ないし３独立変数の Involutive な２階１未知関数偏微分方程式系に対する研究を包括するものであり、多独立変数の２階１未知関数偏微分方程式系の表象（シンボル）がどのような性質を持てば、２段階の「簡約化」が可能となるかを明らかにした。

これによって、対象となる偏微分方程式系に、多変数のモンジュ特性系が存在するための十分条件を与えている。さらにまた、この簡約化定理を用いて、その接触同値問題が、パラボリック幾何学に還元される２階１未知関数偏微分方程式系のクラスの具体例の

構成法をいくつか与えた。

これを、オーストラリア国立大学における The Geometory of differential equations 研究集会（招待講演）および、中央大学における Encounter with Mathematics 講演会（招待講演）において解説した。

平成 24 年度には、まず、佐藤肇氏との共著論文「Lie tensor product manifolds」を完成させ、深さ２である古典型単純階別リー環に対して、その階別構造の負のパートが与える標準微分式系を具体的に記述した。これは、深さ２である古典型単純階別リー環が定めるパラボリック幾何学のモデル空間の local な記述を与えるものとなっている。

より詳しくは、つぎのような結果を得た：パラボリック幾何学のモデル空間は、R-空間と呼ばれる等質空間 M = G/P である。ここに G は単純リー群であり、P は G のパラボリック部分群である。G のリー環を g とするとき、P に対応する部分リー環 p を与えることと g に階別リー環の構造（g = g_{-k}+・・・+ g_k)を与えることは等価である（この時 p = g_0 +・・・+ g_k)。さらにこの階別リー環の構造は（複素リー環） g に対応するディンキン図形 X_n の頂点の部分集合 D_1 を定めることで与えられる。このとき、階別リー環 g = g_{-k} +・・・+ g_k の深さ k が２以上ならば、g_{-1} が定める M 上の G 不変微分式系 D に対して、g の負のパート m = g_{-k} +・・・+ g_{-1} は微分式系 D の表象代数となっている。これに対して、我々は、g が古典単純リー環の場合に、深さが２であり、D_1 が１つの頂点からなる階別リー環の m = g_{-2} + g_{-1} の構造を具体的に記述し、対応する標準微分式系を座標表示した。

これを、ニュージーランド・オックランド大学における Seminar Talk および、オーストリア Erwin Schrodinger Institute における The Interaction of Geometory Representation Theory 研究集会（招待講演）において解説した。

平成 25 年度には、研究最終年度として、これまでの研究を「二階の接触幾何学 (Contact Geometry of Second Order II)」としてまとめる作業を行った。この論文の主要定理である「簡約化定理」は、E.Cartan の２ないし３独立変数の Involutive な２階１未知関数偏微分方程式系に対する研究を包括するものであり、多独立変数の２階１未知関数偏微分方程式系の表象（シンボル）がどのような性質を持てば、２段階の「簡約化」が可能になるかを明らかにした。この条件によって、対象となる偏微分方程式系に、多変数のモンジュ特性系が存在するための十分条件を与えている。

さらに、この論文では、２段階の「Reduction 過程」を最も一般的な形で定式化した。その結果、これまで、散発的に理解されていた標準形を持つ特殊な Involutive System の系列の、２段階簡約過程を通じての、統一的理解が進んだ。また、この一般的な「簡約化定理」の応用として、パラボリック幾何学に還元できる多くの二階の過剰決定系のクラスの例の具体的な構成法を示した。

これを、ポーランド・Banach Ceter における Polish-Japanese Siguralities Working Days 研究集会（招待講演）において解説した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　２件）

(1) K.Yamaguchi, Contact Geometry of Second Order II, AdvancedStudies in Pure Math.,査読有り, 45 (2014),
(2) H.Sato and K.Yamaguchi, Lie tensor product manifolds, Demonstratio Mathematica, 査読有り,45, No4 (2012), 909-927

〔学会発表〕（計　４件）

(1) K.Yamaguchi, Contact Geometry of Second Order, Polish-Japanese Siguralities Working Days, Banach Center, Warsaw, 2013 年 8 月 28 日
(2) K.Yamaguchi、B3-geometry in contact geometry of second order, The Interaction of Geometry and Representation Theory, Exploring new frontiers at Erwin Schroedinger Institute, Vienna, 2012 年 9 月 12 日
(3) 山口佳三、Contact Geometry of Second Order、Encounter with Mathematics(招待講演),中央大学, 2011 年 10 月 15 日
(4) K.Yamaguchi 、Reduction Theorems in contact geometry of second order, The Geometry of Differential Equations at Australian National University, 2011 年 9 月 20 日

６．研究組織

研究代表者
山口　佳三(YAMAGUCHI KEIZO)
北海道大学・総長
研究者番号：00113639