

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 26 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540068

研究課題名(和文) リンクが有理ホモロジー球面であるような複素2次元特異点の研究

研究課題名(英文) A study of complex surface singularities whose link is a rational homology sphere

研究代表者

奥間 智弘 (Okuma, Tomohiro)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：00300533

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：複素2次元特異点の幾何種数などの基本的な解析的不変量について研究した。リンクが有理ホモロジー球面であるような擬斉次特異点の最小良特異点解消空間の接層の第1次コホモロジーの次元をリンクのサイフェルト不変量によって表現した(A. Nemethi氏との共同研究)。Gorenstein特異点と有理型特異点の場合に good ideal の存在を示し、有理型特異点の good ideal は最小特異点解消上のネフサイクルに対応することを証明した(渡辺敬一氏、吉田健一氏との共同研究)。また、ブリスコーン完全交叉特異点の極大イデアルサイクルを具体的に記述した(孟凡寧氏との共同研究)。

研究成果の概要(英文)：We studied fundamental analytic invariants of complex normal surface singularities, such as geometric genus. For a weighted homogeneous singularity with rational homology sphere link, we expressed the dimension of the first cohomology group of the tangent sheaf on the minimal good resolution using Seifert invariants (joint work with A. Nemethi). We introduced a notion of pg-cycle and investigated fundamental properties, and then for Gorenstein singularities and rational singularities, we proved that the good ideal exists, and furthermore that good ideals for rational singularities correspond to nef cycles on the minimal resolution (joint work with Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida). We also gave an explicit expression of the maximal ideal cycle on a complete intersection of Brieskorn type (joint work with Fan-Ning Meng). This generalizes the results by Konno and Nagashima for Brieskorn hypersurfaces.

研究分野：複素特異点論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：2次元特異点 幾何種数 擬斉次特異点

1. 研究開始当初の背景

複素 2 次元特異点の近傍はリンクといわれる実 3 次元多様体上の錘と同相である。したがって、リンクが特異点の近傍の位相を決定する。また、リンクと特異点解消グラフは互いを決定することが知られている。すなわち、特異点の位相不変量は特異点解消グラフの不変量である。

(1) Artin と Laufer は有理型特異点と最小楕円型特異点の極大イデアルサイクルや重複度、埋め込み次元などが位相不変量であることを示した。Nemethi はそれらの結果をリンクが有理ホモロジー球面になるような数値的ゴレンスタイン楕円型特異点に拡張した。それは幾何種数が位相不変量になるという結果を含む。

(2) 2002 年頃に W. Neumann と J. Wahl によってスライス商特異点の概念が導入された。それはリンクが有理ホモロジー球面である擬斉次特異点の一般化ともみなせる。リンクが有理ホモロジー球面になるような 2 次元特異点に対して、リンクのホモロジー群が有限群なので、普遍アーベル被覆とよばれる有限アーベル被覆が存在する。スライス商特異点とは、普遍アーベル被覆がスライスタイプとよばれる完全交叉特異点になるものである。

(3) スライス商特異点の概念が導入された頃、リンクが有理ホモロジー球面になるような Q ゴレンスタイン 2 次元特異点に関して次の予想があった: (a) そのような特異点はスライス商である (Neumann-Wahl), (b) Neumann-Wahl のキャッソン不変量予想を一般化したサイバーグ・ウィッテン不変量予想が成り立つ (Nemethi-Nicolaescu)。しかし、Nemethi らにより両方に反例があることが示された。それがスライス商特異点の詳細な研究を促すことになった。

(4) 一方、研究代表者により有理型特異点と最小楕円型特異点はスライス商特異点であることが示された。Artin, Laufer, Nemethi の結果がスライス商特異点にも拡張されることが期待された。その後 Neumann と Wahl はスライス商特異点の特徴づけを与えた。その応用として研究代表者により幾何種数や重複度が特異点解消グラフから計算する方法が与えられた。さらに、幾何種数公式の応用としてスライス商特異点に対してサイバーグ・ウィッテン不変量予想が肯定的であることが証明された (Nemethi・奥間)。それらの結果がいかに拡張されるのかが問題となった。

(5) スライス商特異点の埋め込み次元

も有理型特異点やある種の楕円型特異点のようにグラフから計算できることが期待されたが、擬斉次特異点の場合でさえそれは成り立たず、それを求める方法は単純ではないことが明らかになった。一方で擬斉次特異点の特異変形がスライス商特異点でない例も示され (Sell), 擬斉次特異点についてもより詳細な理解が必要になった。

2. 研究の目的

リンクが有理ホモロジー球面になるような複素 2 次元特異点を対象とし、上記で述べたようなスライス商特異点の基本的な解析的不変量の記述やその応用に関する結果をより広い対象に適用すること、不変量を求める方法について出来るだけ具体的に記述すること、および擬斉次特異点の詳細な性質と近隣の特異点の解析を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

幾何種数公式に関しては公式にあらわれるイデアルのフィルとレーションを与える因子について考察した。

擬斉次特異点に関しては先行結果の方法を解析した。連携研究者の都丸氏の C^* 作用を持つ退化族の理論、特に商特異点の被覆に関する結果の応用は重要である。また、特異点解消の方法を工夫し、部分特異点解消上の層のコホモロジーや次数づけに付随する直和分解を考察した。

Good ideal の研究では因子に付随する層の完全列の構成などで工夫した。

本研究を進めるためには、複素幾何学、環論、トポロジーなどの各方面からのアプローチが必要である。そのために必要な文献を入手した。最新の研究情報を得るため、また研究成果を発表するために海外を含め様々な研究集会等へ参加した。課題をより深く理解し新たなアイデアを得るために共同研究者や連携研究者との研究打ち合わせを行うことが重要である。共同研究者の Nemethi 氏とは毎年ヨーロッパで議論する機会を設けた。共同研究者の渡辺敬一氏と吉田健一氏や連携研究者の都丸正氏と議論する機会も得ることができ、それらが成果を得るために大変重要であった。

4. 研究成果

(1) 幾何種数の公式

スライス商特異点の幾何種数公式の元となった加法公式がどの程度成り立つかを調べた。それは、与えられた特異点の幾何種数を、解消グラフの分割に対応する特異点の幾何種数の和と「補正項」の和で表す公式である。スライス商特異点の場合は「補正

項」として因子に付随するフィルトレーションから決まる periodic constant とよばれる不変量があらわれ、グラフから具体的に計算することができた。

本研究においては、一般の特異点に対して「補正項」として periodic constant があらわれるための一つの十分条件を得た。たとえば、almost rational singularity とよばれるクラスがその条件を満たす。そのクラスは有理型特異点を含むが、スプライス商特異点にはならない特異点を含む。また、加法公式の対象を直線束から局所自由層に広げた。

(2) プリスコーン完全交叉特異点の極大イデアルサイクルについて

極大イデアルサイクルは解析的不変量であり、一般には求めることが非常に困難である。「背景」で述べた結果や、都丸正氏による巡回被覆タイプの超曲面特異点など限られた場合以外では余り計算されていない。

本研究では、今野一宏氏と長島大祐氏によるプリスコーン超曲面に対する結果をプリスコーン完全交叉特異点に拡張した。すなわち、最小良特異点解消空間上の極大イデアルサイクル、基本サイクル、標準サイクル、基本種数を具体的に記述した。それらは、定義式に現れる単項式の指数から初等的な計算で得られるものであり、Karras による特徴づけを用いれば、小平特異点になるための条件も簡潔に表せる。

(3) 接層のコホモロジーについて

一般に特異点解消空間の接層のコホモロジーの次元は、変形論にも関係し重要な解析的不変量であるが、一般には求めるのが困難である。

本研究では、リンクが有理ホモロジー球面になるような擬斉次特異点の最小良特異点解消空間の接層の第1次コホモロジーの次元が特異点解消グラフから計算できることを確かめた。実際、リンクのザイフェルト不変量から具体的に計算できるよう表現し、第2種数との関係も示した。得られた結果は計算例を提供するとともに一般の特異点の場合への足掛かりになるとと思われる。

この研究は Nemethi 氏と共同で行った。内容をまとめた論文を投稿中である。

(4) Good ideal について

リンクが有理ホモロジー球面であるという仮定なしに特異点の局所環の good ideal について渡辺敬一氏と吉田健一氏と共同研究を行った。Good ideal は局所環において、パラメータイデアルの次に良いイデアルといえる。しかしながら、一般の特異点についてはその存在性さえもわかっていない。

我々は Gorenstein 特異点と有理型特異点

の場合に、good ideal の存在定理を証明した。さらに、有理型特異点の good ideal は最小特異点解消上のネフサイクルに対応することも示した。特に、good ideal の集合が半群になることが従う。それに関連し、特異点解消空間上の pg-cycle と、それによって定義される pg-ideal の概念を導入し、その基本性質を研究した。例えば、pg-ideal によって定義される直線束は大域切断で生成され、pg-ideal はリダクション数が1になるなど良い性質を持つ。また、pg-ideal の集合は半群をなし、Gorenstein 特異点の場合には pg-cycle と標準サイクルの交点数が自明なときに good ideal が得られる。

Pg-ideal がさらにある条件を持たすと good ideal になることが期待される。今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Fan-Ning Meng and T. Okuma, The maximal ideal cycles over complete intersection surface singularities of Brieskorn type, *Kyushu J. Math.* 68 (2014), 121--137. 査読有
DOI: 10.2206/kyushujm.68.121

T. Okuma, Invariants of splice quotient singularities, *Singularities in Geometry and Topology*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 20, 2012, pp. 149--159. 査読有
DOI 10.4171/118

[学会発表](計8件)

T. Okuma, Good ideals for normal surface singularities, 「Hyperplane Arrangements and Characteristic classes」, 京都大学数理解析研究所, 2013年11月12日

T. Okuma, Good ideals for Gorenstein surface singularities, 「The 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities」, Universite Nice Sophia Antipolis, Nice, France, 2013年9月21日

奥間智弘, The maximal ideal cycles over complete intersection surface singularities of Brieskorn type, 「日本数学会年会函数論分科会」, 京都大学, 2013年3月23日

奥間智弘, 複素2次元特異点の幾何種数について, 「日本数学会東北支部会」, 特別講演, 東北大学大学院理学研究科,

2013年2月16日

奥間智弘, 2次元特異点の幾何種数と periodic constant について, 「特異点と多様体の幾何学」, 山形大学理学部, 2012年8月25日

奥間智弘, 複素2次元特異点の幾何種数について, 「日本数学会年会函数論分科会」, 特別講演, 東京理科大学理学部, 2012年3月27日

T. Okuma, The embedding dimension of weighted homogeneous complex surface singularities, 「第4回日豪実・複素特異点研究集会」, 兵庫教育大学神戸サテライト, 2011年11月23日

T. Okuma, On the geometric genus of certain surface singularities, 「第6回日仏特異点シンポジウム」, 九州大学西新プラザ, 2011年9月5日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

奥間 智弘 (OKUMA TOMOHIRO)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 00300533

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

都丸 正 (TOMARU TADASHI)
群馬大学・医学部・教授
研究者番号: 70132579