様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４００７３

研究課題名（和文）不定値グラスマン多様体上のツイスター変換と無限次元表現論

研究課題名（英文）Twistor transform for indefinite Grassmannian manifolds and the theory of infinite-dimensional representations

研究代表者
関口　英子（Sekiguchi, Hideko）

東京大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：５０２８１１３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,300,000円

研究成果の概要（和文）：不定値グラスマン多様体のサイクル空間が非管状のエルミート対称空間である場合に，そのペンローズ変換を定義し，その像がある微分方程式系の解空間として特徴づけられることを証明した．さらに，ペンローズ変換の像の特徴づけの応用として，半単純対称対(G,H)=(U(n,n), SO*(2n))に関して G のある特異なユニタリ表現を H に制限したときの既約分解を決定した．これは，正則離散系列表現を一般の半単純対称対に制限したときの既約分解を明示的に与える Hua-Kostant-Schmid-Kobayashi の分岐則を，特別な設定の下で，退化したユニタリ表現に拡張した形となっている．

研究成果の概要（英文）：The irreducible decomposition of scalar holomorphic discrete series representations when restricted to semisimple symmetric pairs (G,H) is explicitly known as the Kobayashi--Schmid rule. This was proved by Schmid for H compact and by Kobayashi for general H. More generally, Kobayashi's multiplicity-free theorem ('97) guarantees that the restriction π|H is multiplicity-free whenever (G,H) is a symmetric pair and π is an irreducible unitary highest weight module of scalar type. During the period of research, I studied the Penrose transform for indefinite Grassmannian manifolds, and as its application, obtained some branching laws of singular highest weight modules with respect to the pair (U(n,n), SO*(2n)). This gives an extension of the Kobayashi--Schmid formula to certain non-tempered unitary representations which are realized in Dolbeault cohomology groups over indefinite Grassmannian manifolds. The resulting branching rule is multiplicity-free and discretely decomposable.

研究分野： 非可換調和解析

キーワード： ペンローズ変換　ユニタリ表現　有界対称領域　表現の分岐則　複素多様体　リー群　グラスマン多様体　積分幾何

１．研究開始当初の背景

当該研究代表者が「ペンローズ変換による微分方程式系の解の構成の研究」を開始した当時，次のことが知られていた．

(1) 重力場のない場の方程式(2 階)の大域解の構成(Penrose のツイスター理論，1960 年代; Eastwood, Penrose, Wells 等による一般化(引用文献①), 1980 年代)

(2) Gauss の超幾何関数を多変数に一般化する試みとして多変数超幾何微分方程式系(2 × 2 小行列式型) とその解の研究(Gelfand, Kapranov, Zelevinsky, 青本和彦)

(3) 半単純リー群の離散系列表現をリーマン対称空間上のベクトル束の大域切断で，ある 1 階の偏微分方程式系をみたす解空間として構成する Schmid, 堀田，Parthasarathy の理論(1970 年代)と Wong による一般化(1992)

上記の(1), (2), (3) はそれぞれ別の分野における研究であった．一方，当該研究代表者は 2011 年までの一連の研究において, (2) を高階の k × k 小行列式型の偏微分方程式系に一般化し，その大域解を(3)の一般化(Zuckerman-Vogan の導来函手加群を用いる) を使って積分表示する公式をエルミート対称空間の双正則変換群である不定値ユニタリ群 U(n,n)，および実シンプレクティック群 Sp(n,R) に対して個別に計算して証明した. これは(1) で述べた複素 3 次元の場合の Penrose 変換の理論(U(2,2) の場合) の高次元への一般化となっている. ただし, (1), (2), (3) を明示的に関係づけて証明できていたのはサイクル空間が管状領域となっている場合のみであった.

一方，表現論に関しては次の結果が知られていた. 一般に半単純リー群Ｇに付随するリーマン対称空間Xがエルミート対称空間になるとき, G をエルミートリー群という．実シンプレクティック群 Sp(n,R), 不定値ユニタリ群 U(p,q) や SO*(2n), SO(n,2) などがその典型例である．X 上の G 同変な正則直線束の正則な大域切断全体のなす空間への G の作用は既約とは限らないが，その部分空間がヒルベルト空間 V であって，そこに G がユニタリ表現として作用するときは，そのユニタリ表現は常に既約になることが知られている．この V が二乗可積分で正則な切断からなるヒルベルト空間のとき，πをスカラー型の正則離散系列表現という．正則離散系列表現は Harish-Chandra によって構成された. エルミート対称空間の正則ベクトル束の大域正則切断の空間に実現されるユニタリ表現は，正則離散系列表現だけではなく，Gelfand-Kirillov 次元が正則離散系列表現よりも真に小さい「特異な」無限次元表現を含む. どのような直線束に対してユニタリ表現が大域正則切断の空間に実現されるかという問題は，直線束のパラメータが特異な場合，非自明である．この問題は「既約なユニタリ最高ウェイト表現の分類問題」として代数的に定式化され Enright-Howe-Wallach および Jakobsen によって分類が完成した. さらに，スカラー型の既約なユニタリ最高ウェイト表現をＧ の部分群Ｈ へ制限したときにどのように振る舞うかについて良く知られているのは，Kobayashi-Schmid の公式，あるいは，Hua-Kostant-Schmid-Kobayashi の公式と呼ばれる分岐則である．これは (G,H)が半単純対称対の場合の，G のスカラー型の正則離散系列表現をＨに制限したときの既約分解に関する公式である．この分岐則は H が極大コンパクト群の場合に Hua が古典型リー群で証明し，Kostant と Schmid (引用文献③)が独立に H がコンパクト群のときの一般公式を与え，さらに，小林俊行氏が H が非コンパクト群の場合を含めて完全に解決した（引用文献②）分岐則である．より一般に，複素多様体における可視的作用の理論によって，πがスカラー型の既約ユニタリ最高ウェイト表現であり，(G,H) が半単純対称対ならば, πを部分群Ｈ に制限したときに無重複になるという定理（Kobayashi’s multiplicity-freeness theorem , 1997, 2007）が知られている．ただし，その明示公式に関しては，πの Gelfand-Kirillov 次元が正則離散系列表現よりも小さい特異なユニタリ表現に対しては, 制限 π|Ｈの具体的な既約分解の公式は特別な場合を除いて知られていなかった. 以上が研究開始当初の主たる背景である.

２．研究の目的

本研究は当該研究代表者が以前から継続して研究してきた「ペンローズ変換を用いた，半単純リー群の無限次元表現」の結果に立脚し，不定値グラスマン多様体上に定義される無限次元表現を積分幾何の立場から明らかにすることを目指した.

３．研究の方法

非コンパクトグラスマン多様体に含まれる，あるコンパクト複素多様体（サイクル）の族の全体は有界対称領域の構造をもち，特に，複素多様体となる．そこで，非コンパクトなグラスマン多様体上の Dolbeault コホモロジーに対して，サイクル上の積分を行うことによって，積分変換の一種であるペンローズ変換を定義することができる．その像は有界対称領域上のある正則直線束の切断を与える．さらに，双正則変換群の作用に関して，像の空間は閉じている．一方，ペンローズ変換の像は Cauchy-Riemann の微分方程式と同時に，小行列式型の偏微分方程式（青本-Gelfand の超幾何微分方程式を高階に一般化した微分方程式系）をみたすことが証明できる．この偏微分方程式系の構造を調べ，さらに非コンパクトな部分群に関して，表現がどのように振る舞うかを解明する．こ

のためにペンローズ変換の像が満たす微分方程式を部分多様体に制限して得られる誘導方程式系を考察する．

４．研究成果

非コンパクトグラスマン多様体に含まれる，あるコンパクト複素多様体（サイクル）の族の全体は再び複素多様体（有界対称領域）の構造をもつ．そこで，この非コンパクトな複素多様体上の Dolbeault コホモロジーに対して，サイクル上の積分を行うことによって，サイクルのパラメータ空間（以下，サイクル空間とよぶ）上の関数が得られ，この対応によってペンローズ変換を定義することができる．

第 4 論文においては，不定値グラスマン多様体に対するペンローズ変換を考察した．そのサイクル空間は（管状型とは限らない）エルミート対称空間となるため，ペンローズ変換は，不定値グラスマン多様体上の Dolbeault コホモロジー群から（管状型とは限らない）エルミート対称空間上の関数空間への写像として定義される．本研究では，このペンローズ変換の像がみたす偏微分方程式系を具体的に書き下し，逆にその大域解が全てペンローズ変換で得られることを証明した．この証明は従前 Eastwood，Penrose，Wells 等による複素 3 次元の場合のペンローズ変換の結果を全く別の手法で高次元に拡張したものである．その手法は，ある可解リー群の概均質ベクトル空間の b-函数を用いて，高階の微分方程式系の生成元の動径成分を取り出すというアイディアに基づくもので，当該研究代表者が以前の研究において，管状領域という仮定の下で個別には成功していたが，非管状領域に対しては成功していなかったものである．表現論的な観点からは，この不定値グラスマン多様体の双正則変換群は，Dolbeault コホモロジーに既約な無限次元表現として作用する．この表現は Gelfand-Kirillov 次元が正則離散系列表現よりも小さい特異な無限次元表現であり，Cartan 対合で安定な複素放物型部分代数からコホモロジー的に誘導して得られる Zuckerman-Vogan の導来函手加群 Aq(λ)を稠密な(g,K)加群として含む．

さらにペンローズ変換の表現論的な解釈を用いて，上記の結果を分岐則の問題に応用した．すなわち，正則離散系列表現に対して知られている Hua – Kostant – Schmid – Kobayashi の公式を正則離散系列ではない特異なユニタリ表現に拡張することを目指し，それを極めて限定された場合であるが，具体例で実行した．すなわち、不定値グラスマン多様体 X 上の双正則変換群 G に同変な正則直線束を考える．このとき，群 G はこの正則直線束に係数をもつコホモロジーの空間に既約（無限次元）表現として作用する．G の極大コンパクト部分群を X に作用させ，その原点における軌道は（低い次元の）グラスマン多様体となる．これを G の元で左移動して得られる各々のコンパクト複素多様体をサイクルとみなし，コホモロジーの各元をサイクル上で積分することによって，コホモロジーからサイクル空間上の関数への G 同変な変換（Penrose 変換の高次元化）が定義される．このとき，（高次元）Penrose 変換は単射であること，および，その像が Cauchy-Riemann の方程式，および，行列式型の連立偏微分方程式系をみたすことが分かる．特に，この表現は最高ウェイト表現となり，さらに，G がユニタリに作用するようなヒルベルト空間を稠密に含むことも証明される．このユニタリ表現(π，V)を G の部分群 H に制限したときの分岐則を求めるために，部分群 H が定める複素部分多様体と上記で得られた Penrose 変換の像の特徴付けを活用した．すなわち，微分方程式系の大域解を，部分群 H が作用する複素部分多様体に制限したとき，解がどのような境界値のデータによって定まるか，また，境界値データとなり得る関数はどのような微分方程式をみたすかを決定すればよい．このためには二つの群 G と L の２つのペンローズ変換を比較するというアイディアを用いた．ここで，L は H と非コンパクト部分を相補うような部分群であり，G の 2 つの involutive automorphism を用いて一般的に定義される．このアイディアに基づいて，G の無限次元表現πを H に制限したときの既約分解を与える分岐則の公式を証明した．この分岐則は無重複表現であるが，その無重複性に関しては複素多様体の可視的作用の一般理論から導かれる小林氏の定理「スカラー型の最高ウェイト表現を半単純対称対に制限すると無重複である」の特殊な場合と解釈することができる．本研究はペンローズ変換の手法を新たに取り込んで，その抽象的な無重複性定理を明示して分岐則を決定したという意味を持つ．第 2 論文および第 3 論文においては，不定値グラスマン多様体上の Dobeault コホモロジー群に定義される無限次元表現の分岐則を具体的に求めた．これは代数的には Zuckerman-Vogan の導来函手加群として構成される(g,K) 加群を稠密な空間として含む既約ユニタリ表現のある系列を半単純対称対 (G,H)=(U(n,n)，SO*(2n)) に制限したときの，H 加群としての既約分解である．得られた分岐則は離散的であり，しかも同じ既約表現は二度は現れない（無重複表現）分解になっている．

2012 年にボストンで行われたアメリカ数学会分科会における Helgason 教授の 85 歳記念研究集会で，積分幾何学の表現論における１つの応用と，そこから生じる微分方程式系に焦点を当てて招待講演を行った．ここでの講演の内容に基づき，査読付きの論文として第１論文をアメリカ数学会から出版した．さらに，約 4 年に一度の頻度で開催されるアジア数学会議において，2013 年に招待講

演を行い，第 1 論文と第 4 論文の内容を中心に，当該研究代表者の最新の成果の発表を行った．

<引用文献>

① M. Eastwood, R. Penrose, R.O. Wells, Jr., Cohomology and massless fields, Comm. Math. Phys. 78, 1981, pages 305-351.
② T. Kobayashi, Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs, Progress in Mathematics(Birkhäuser), Vol. 255, 2007, pages 45-109.
③ W.Schmid, Die Randwerte holomorphe funktionen auf hermetisch symmetrischen Raumen, Invent. Math. 9 1969-1970, pages 61-80.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　4 件）

① Hideko SEKIGUCHI , Radon-Penrose transform between symmetric spaces, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 査読有, vol.598, 2013, pages 239-256.
② Hideko SEKIGUCHI, Branching rules of singular unitary representations with respect to symmetric pairs (A_{2n-1}, D_n), International Journal of Mathematics, 査読有, vol. 24, 2013, 25 pages, DOI:10.1142/S0129167X13500110.
③ Hideko SEKIGUCHI, Branching rules of Dolbeault cohomology groups over indefinite Grassmannian manifolds, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences, 査読有, vol. 87, 2011, pages 31-34.
④ Hideko SEKIGUCHI, Penrose transform for indefinite Grassmann manifolds, International Journal of Mathematics, 査読有, vol.22, 2011, pages 47-65.

〔学会発表〕（計　2　件）

① Hideko SEKIGUCHI, Penrose transform between symmetric spaces, The Asian Mathematical Conference (AMC2013), (招待講演), 2013 年 6 月 30 日-7 月 4 日, BEXCO, Busan (Korea).
② Hideko Sekiguchi, Penrose transform between symmetric spaces, 2012 Joint Mathematics Meetings, AMS special Session on Radon Transforms and Geometric Analysis in Honor of Sigurdur Helgason (招待講演), 2012 年 1 月 7 日, Boston (アメリカ合衆国).

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

関口 英子（SEKIGUCHI, Hideko）
東京大学・大学院数理科学研究科･准教授
研究者番号：50281134

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：