

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540076

研究課題名(和文) 結び目群の指標代数多様体を用いたファイバー性と種数の研究

研究課題名(英文) A study of the fiberedness and the genus using character varieties of knot groups

研究代表者

森藤 孝之 (MORIFUJI, Takayuki)

慶應義塾大学・経済学部・教授

研究者番号：90334466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、結び目群の指標代数多様体とその上の関数であるねじれアレキサンダー不変量の情報を用いて、結び目の幾何学的性質をある種の「有限性」で捉える枠組みを与えることを目標としている。得られた成果の概要は以下の通りである。

(1) 2橋結び目を含む広範な結び目のクラスに対して、指標代数多様体の1次元既約成分上でのねじれアレキサンダー不変量の情報を用いて、結び目のファイバー性と種数が決定できることを示した。

(2) 双曲結び目のファイバー性と種数に関するDunfield-Friedl-Jackson予想を、2橋結び目のある無限系列に対して肯定的に解決した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research was to construct a framework for detecting geometric properties of knots by some kind of finiteness using the character variety of the knot group and the twisted Alexander invariant. The results are as follows.

(1) We showed that the fiberedness and the genus of certain wide classes of knots (which include 2-bridge knots) are determined by information of the twisted Alexander invariant on a one dimensional irreducible component of the character variety.

(2) We gave an affirmative answer to a conjecture of Dunfield, Friedl and Jackson about the fiberedness and the genus of hyperbolic knots for an infinite family of 2-bridge knots.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目群 指標代数多様体 ねじれアレキサンダー不変量

### 1. 研究開始当初の背景

ねじれアレキサンダー不変量は、結び目群 (3次元球面内の結び目外部空間の基本群) の場合は X. S. Lin により、一般の有限表示群の場合は和田昌昭によって導入された。この不変量の著しい応用として、ファイバー結び目 (結び目外部空間に円周上の曲面束の構造が入る) の特徴づけがある。これは結び目群の剰余有限性に基つき、有限群へのすべての表現と対応するねじれアレキサンダー不変量の情報を用いることで、ファイバー性の必要十分条件を記述するものである。しかしながら、与えられた結び目群に対して、この判定条件から具体的にファイバー結び目であることを証明することは、一般には困難である。

そこで、より判定のしやすい (例えば有限回のプロセスで判定可能となるような)、結び目の幾何学的性質の特徴づけを与える手法を考案することは、自然な問題意識であると思われる。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、結び目群の指標代数多様体 (結び目群の  $SL(2, \mathbb{C})$ -表現の指標全体のなす代数多様体) とその上の関数であるねじれアレキサンダー不変量の情報を用いて、結び目の幾何学的性質のある種の「有限性」で捉える枠組みを与えることである。より具体的には、次の2点

- (1) 結び目群の  $SL(2, \mathbb{C})$ -指標代数多様体上の関数としてのねじれアレキサンダー不変量の明示公式
- (2) 得られた関数の性質と結び目のファイバー性および種数 (結び目の張るザイフェルト曲面の最小種数) との関係

を明らかにすることを目標とする。

### 3. 研究の方法

研究の目的欄で述べた2つの具体的な研究目標(1)、(2)のうち、(2)は(1)の結果に大きく依存している。そこで、最初から一般的設定のもとで両者の考察を始めるのではなく、研究全体の見通しを良くするため、適度な一般性をもった性質の良い結び目のクラスに対して(1)および(2)の研究を推進する。その様子を詳細に解析した後、より一般の結び目へ、扱う対象 (結び目のクラス) を順次拡大していくという基本方針に則って研究を効果的に進める。

### 4. 研究成果

以下、当該研究期間に得られた研究成果を年度別に報告する。

(1) 2011年度：3次元球面内の2橋結び目と呼ばれる (代数的に扱いやすい) 非常に性質のよい結び目のクラスに対して研究を行った。実際、2橋結び目は「小さい結び目」と呼ばれる結び目の典型例になっており、その  $SL(2, \mathbb{C})$ -指標代数多様体の次元が1であることが知られている。この状況下で、当初の目標であった、ねじれアレキサンダー不変量の明示公式は得られなかったものの、指標代数多様体のある既約成分上で、結び目のファイバー性に対応した指標の個数の有限性を示すことができた。この結果、2橋結び目のファイバー性をねじれアレキサンダー不変量の情報で特徴づけることに成功した。

また、これと同時に、この1次元既約成分上の情報から、2橋結び目の結び目種数が決定できることもわかった。

(2) 2012年度：「2. 研究の目的」欄で述べた2つの研究目標に対して、2011年度に得られた研究成果をもとにして、2012年度は(1)と(2)の橋渡しに係る部分に焦点を絞って研究を行った。特に、2橋結び目の一種である3次元球面内の双曲的な (結び目補空間に有限体積をもつ完備双曲構造が入る) ツイスト結び目と呼ばれる重要な結び目のクラスに対して、Dunfield, Friedl, Jackson の3氏によって提唱されていた予想 (DFJ 予想) を肯定的に解決することに成功した。これまでに知られていたこの予想に対する部分的な研究成果は、いずれもコンピュータの援用による大規模な数値計算に基づいたものであったが、ここで得られた結果は、DFJ 予想が無限個の結び目に対して成立することを示した、最初の具体例となった。この予想は、それ自身解決が望まれる大変重要なものであるが、さらに本研究課題との関わりで見ると、DFJ 予想から、研究目標(2)の1つの定式化が直接導かれるという意味において、興味深い成果と言える。

また、Friedl, Kim, Kitayama の3氏によって得られていた、ねじれアレキサンダー不変量の次数のパリティ (偶奇性) に関する結果 (ねじれアレキサンダー不変量の次数にある種の制限がつくという結果) の最善性 (それ以上、定理の主張を強めることが出来ないこと) を3次元球面内の結び目に対して示した。

さらに、上記結果とは別に、ねじれアレキサンダー不変量の2番目の係数 (多項式において次数が2番目に高い項の係数) の実数性と結び目のファイバー性との関係について詳しく考察を行い (Dunfield-Friedl-Jackson の問題)、トーラス結び目  $T(2, q)$  とツイスト結び目の無限系列に対して、肯定的な主張が成り立つことを確認した。

(3) 2013年度：前年度までに得られた結果をもとにして、2013年度は研究目標 (2) に焦点

を絞って研究を行った。特に、2011年度中に得られていた2橋結び目に関する研究成果を、2橋結び目よりも真に広い結び目のクラスに対して拡張することに成功した。具体的には、3次元球面内の「小さい結び目」であって、その結び目群から、以下のいずれかの結び目群に全射群準同型写像が存在するときに、指標代数多様体の1次元既約成分の情報とねじれアレキサンダー不変量を用いて、結び目のファイバー性と種数が決定できることを示した：

非ファイバー2橋結び目、  
単根をもち、かつ、非モニックである(最高次係数が1でない)アレキサンダー多項式を許容する結び目、  
非モニックアレキサンダー多項式をもち、かつ、同変結び目符号数が恒等的に零でない結び目。

また、関連する成果として、2012年度中に得られていた、Friedl, Kim, Kitayamaの3氏によるねじれアレキサンダー不変量の次数のパリティに関する最善性の結果を、閉3次元多様体に対して(具体的には結び目に沿ったデーン手術によって得られる閉3次元多様体に対して)証明した。

(4) 2014年度。本研究課題最終年度である本年度は、2012年度中に得られていた、DFJ予想の双曲的ツイスト結び目に対する肯定的解決に関する研究成果を、より広範な2橋結び目のクラス(このクラスはツイスト結び目だけではなく、種数1の2橋結び目をすべて含んでいる)に対して、やはり肯定的に解決することに成功した。定理の主張を正確に述べると次の様になる。

**定理**  $K$  を上記の双曲的な2橋結び目とする。このとき、結び目  $K$  のファイバー性と種数は、 $K$  の補空間の双曲構造に付随した  $SL(2, \mathbb{C})$ -離散忠実表現(ホロノミー表現のリフト)に対応した、ねじれアレキサンダー不変量で決まる。

この成果は、米国オハイオ州立大学の Anh T. Tran 氏との共同研究に基づいている。

一方、ファイバー結び目のモノドロミー写像を研究する観点から、曲面の写像類群の Nielsen-Thurston 理論(曲面の写像類の位相的な分類に関する理論)と3次元リーマン多様体のエータ不変量(スペクトル不変量)との関係についても研究を行った。特に、種数の小さい Hurwitz 曲面(これは曲面の種数を固定した時に、最も対称性の高いコンパクトリーマン面であることが知られている)の自己同型写像に対して、「可約性」と呼ばれる、ある種の位相的対称性と、「エータ不変量の消滅」というスペクトルの非対称性との同値性を示した。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Takayuki Morifuji, Anh T. Tran, Twisted Alexander polynomials of 2-bridge knots for parabolic representations, Pacific Journal of Mathematics, 査読有, 269巻, 2014, 433 - 451

DOI: 10.2140/pjm.2014.269.433

Takayuki Morifuji, Reducibility of automorphisms of Hurwitz surfaces and the eta-invariant, International Journal of Mathematics, 査読有, 25巻, 2014, 1450119-1 - 1450119-8

DOI: 10.1142/S0129167X14501195

Taehee Kim, Takahiro Kitayama, Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials on curves in character varieties of knot groups, International Journal of Mathematics, 査読有, 24巻, 2013, 1350022-1 - 1350022-16

DOI: 10.1142/S0129167X13500225

Takayuki Morifuji, Masaaki Suzuki, A note on degrees of twisted Alexander polynomials II, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 査読有, 50巻, 2013, 929 - 934

DOI: 10.4134/BKMS.2013.50.3.929

Takayuki Morifuji, On the second coefficient of the twisted Alexander polynomial, RIMS Kokyuroku, 査読なし, 1836巻, 2013, 104 - 109

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1836-11.pdf>

Taehee Kim, Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials and character varieties of 2-bridge knot groups, International Journal of Mathematics, 査読有, 23巻, 2012, 1250022-1 - 1250022-24

DOI: 10.1142/S0129167X11007653

Takayuki Morifuji, On a conjecture of Dunfield, Friedl and Jackson, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 査読有, 350巻, 2012, 921 - 924

DOI: 10.1016/j.crma.2012.10.013

Taehee Kim, Takayuki Morifuji, Twisted Alexander polynomials and character varieties of 2-bridge knots, RIMS Kokyuroku, 査読なし, 1747巻, 2011, 77 - 80

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1747-07.pdf>

Takayuki Morifuji, A note on degrees of twisted Alexander polynomials, RIMS Kokyuroku, 査読なし, 1747巻, 2011, 121 - 125

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1747-07.pdf>

〔学会発表〕(計 13 件)

Takayuki Morifuji, On a conjecture of Dunfield-Friedl-Jackson for the hyperbolic torsion polynomial, Topology Seminar, 2014 年 11 月 6 日, 建国大学, ソウル(韓国)

森藤 孝之, 二橋結び目のパラボリック表現とねじれ Alexander 多項式, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会トポロジー分科会, 2014 年 9 月 28 日, 広島大学(広島県・東広島市)

森藤 孝之, 多項式不変量のカテゴリー化, 第 60 回 Encounter with Mathematics 2013 年 5 月 18 日, 中央大学(東京都・文京区)

Takayuki Morifuji, The hyperbolic torsion polynomial and a conjecture of Dunfield-Friedl-Jackson, Seminari di Geometria, 2013 年 3 月 13 日, Universita di Pisa, ピサ(イタリア)

森藤 孝之, On twisted Alexander polynomials on curves, トポロジーセミナー, 2013 年 2 月 4 日, 群馬大学(群馬県・前橋市)

Takayuki Morifuji, The hyperbolic torsion polynomial of twist knots, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics, 2013 年 1 月 14 日, 東京大学(東京都・目黒区)

Takayuki Morifuji, Representation spaces of knot groups and twisted Alexander invariants, The Conference of Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis, 2012 年 7 月 23 日, The Center of Engineering Mathematics, Kunming University of Science and Technology, 昆明(中国)

森藤 孝之, A formula for the twisted Alexander polynomial of torus knots, 微分幾何・トポロジーセミナー, 2012 年 5 月 21 日, 慶應義塾大学(神奈川県・横浜市)

Takayuki Morifuji, Representations spaces and twisted Alexander polynomials of torus knots, Le Teich, Laboratoire d'Analyse, Topologie, Probabilites, 2012 年 3 月 16 日, Aix-Marseille University, マルセイユ(フランス)

森藤 孝之, 基本群の表現空間とねじれ Alexander 不変量, 上教大トポロジーセミナー, 2012 年 2 月 20 日, 上越教育大学(新潟県・上越市)

Takayuki Morifuji, On twisted Alexander polynomials of torus knots for  $SL(2, \mathbb{C})$ -representations, Topology Seminar, 2011 年 12 月 16 日, University of Beijing, 北京(中国)

Takayuki Morifuji, Representation spaces of torus knots and twisted Alexander polynomials, GCOE Workshop "Circle valued Morse Theory and

Alexander Invariants", 2011 年 11 月 16 日, 東京大学(東京都・目黒区)

森藤 孝之, 結び目群の表現とねじれ Alexander 多項式について, トポロジーセミナー, 2011 年 5 月 18 日, 東京工業大学(東京都・目黒区)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

森藤 孝之 (MORIFUJI, Takayuki)  
慶應義塾大学・経済学部・教授  
研究者番号: 90334466

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号: