

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 22 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540079

研究課題名(和文) 正則写像のなす空間の位相と実特異点論のホモトピー論への応用の研究

研究課題名(英文) The spaces of regular maps and the applications of real singularity theory to homotopy theory

研究代表者

山口 耕平 (YAMAGUCHI, Kohhei)

電気通信大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：00175655

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円、(間接経費) 1,080,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、Segal (Acta Math. (1979))によって得られた有理関数の空間の研究結果をより一般の写像空間の場合に拡張することを研究の主要目的とした。とくに、写像空間  $\text{Map}(M, N)$  として、 $M$ が1次元より大きな次元の多様体 $M$ のときの例として $M$ 、 $N$ が実射影空間のときに、無限次元空間  $\text{Map}(M, N)$  のホモトピー型を研究した。この場合、多項式で表現される代数的写像(正則写像)のなす有限次元空間  $\text{Alg}(M, N)$  で、これがどの程度の次元まで近似できるかを調べ、A. Kozłowski氏(ワルシャワ大学)との共同研究でその近似次元を具体的に計算することに成功した。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research is to investigate the generalization of the work of spaces of rational functions due to G. Segal (Acta Math., 1979). In this research, we consider the topology of the mapping space  $\text{Map}(M, N)$  when  $M$  and  $N$  are manifolds with  $\dim M > 1$ , and we mainly study the case that  $M$  and  $N$  are real projective spaces. In this case, we try to approximate it by a finite dimensional subspace  $\text{Alg}(M, N)$  of algebraic maps (or regular maps) which are represented by polynomials. In particular, we can determine the explicit dimension of approximating homotopy type of it by the joint work with A. Kozłowski (Warsaw University).

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：位相幾何学

キーワード：ホモトピー型 代数的写像 実代数幾何学 正則写像 写像空間 多様体 ホモロジー群 多様体手術

1. 研究開始当初の背景

(1) 一般に、位相空間  $M$  から  $N$  への連続写像全体のなす写像空間  $\text{Map}(M,N)$  は、無限次元位相空間であり、あまりに巨大な位相空間なので、本研究では、とくに位相空間  $M, N$  としては複素多様体または実代数的多様体 (real algebraic variety) を主に考える。この場合、 $M$  から  $N$  への正則写像や多項式で表現される代数的写像 (多項式写像) からなるその有限次元部分空間  $\text{Hol}(M,N)$  あるいは  $\text{Alg}(M,N)$  によって、 $\text{Map}(M,N)$  を近似して調べることが本研究の目標としたい。このような研究は、もともと G. Segal (Acta Math. (1979)) によるリーマン面  $M$  から  $n$  次元複素射影空間  $\text{CP}(n)$  への正則写像のなす空間  $\text{Hol}(M, \text{CP}(n))$  のホモトピー型の研究や、F. Cohen, R. Cohen, B. Mann, R. Milgram 達のラベル付き粒子の配置空間の研究がその出発点であった。さらにこの問題に関連して、数物理学に密接に関連する Atiyah-Jones 達による Atiyah-Jones 予想も我々の研究に大きく関連していることがその後の Milgram 達の Atiyah-Jones 予想の解決以後わかってきた。

(2) これらの場合、 $M$  はすべて複素 1 次元の空間であった。そこで、我々はこの一般化として  $M$  の次元が複素次元 2 以上の場合やその実版を考え、 $M$  の実次元が 2 以上の場合も取り扱うことを主に考えることとした。とくに、それらの場合にも、Atiyah-Jones 型定理が成立することが数物理学との関連からも強く予想され、また Gromov の H-原理からも我々の場合にも Atiyah-Jones 型定理が成立すると予見された。以上のことが本研究課題の背景にあったことを指摘しておく。

2. 研究の目的

写像の定義空間となる(複素)多様体  $M$  として、複素あるいは実グラスマン多様体  $\text{Gr}(m,n;K)$  を主に考える。(ただし、 $K=\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  とする) その一番簡単な場合として、本研究では  $M$  は  $m$  次元実射影空間  $\text{RP}(m)$  あるいは複素射影空間  $\text{CP}(m)$  (ただし、 $m>1$ ) を取り扱うことにする。

(1) このとき、 $N$  が実代数多様体のとき、包含写像  $i: \text{Alg}(M,N) \rightarrow \text{Map}(M,N)$  によって、無限次元空間  $\text{Map}(M,N)$  が有限次元部分空間  $\text{Alg}(M,N)$  によって、どの程度の次元までそのホモトピー型やホモロジー群が近似できるかを実特異点論や実代数幾何学的手法を利用してホモトピー論の立場から研究する。とくに上記の包含写像に対して、Atiyah-Jones-Segal 型の定理が成立するかどうかをホモトピー論の立場で検証することを第 1 の目的とする。

(2) さらに、(1) の問題の複素版を考える。具体的には、 $N$  が複素多様体のときに、包含写像  $i: \text{Hol}(M,N) \rightarrow \text{Map}(M,N)$  によってどの程度の次元までそのホモトピー型やホモロジー群が近似できるかを(1)と

同様な手法で検証することを目標とする。

(3) (1), (2) に関連して、より一般的なモース理論的原理が、対称性の高い空間  $M, N$  に対して成立するかどうかを今後検証する予定である。

3. 研究の方法

本研究の主要部分は、代数的位相幾何学の分野に属するものである。その対象としている空間は、 $K=\mathbb{R}$ , または  $K=\mathbb{C}$  として  $K$  上の代数多様体  $M$  から  $K$ -代数多様体  $N$  への  $d$  次元以下の  $K$ -係数多項式達で表現される正則写像 (代数的写像) のなす有限次元空間  $\text{Alg}^d(M,N)$  の位相がどの程度まで、無限次元空間  $\text{Map}(M,N)$  を (ホモトピー型の意味で) 近似するかを研究するものであった。研究内容が、代数幾何学や代数等さまざまな分野が位相幾何学と密接に関係するので、代数幾何学・代数や低次元多様体論の研究分担者の協力のもとに、共同研究者 A.Kozłowski 教授 (ワルシャワ大学) と島川教授 (岡山大学) との研究分担を中心としながら研究は行われた。具体的な研究方法は以下である。

(1) まず、 $\text{Alg}(M,N)$  の研究はラベル付き粒子の配置空間 (labeled configuration space) と密接に関連するので、この分野の第一人者の島川教授にはこの方面のサポートをお願いした。

(2) さらに、正則写像の空間の代数幾何学的知識については、大野准教授 (電気通信大学) に研究分担をお願いした。とくに、トーリック多様体 (toric variety) に関する知識については大野先生の貢献が大きかった。

(3) 関連する話題として Morse 理論的側面については、M.Guest 教授 (早稲田大学) にいろいろと教えてもらった。

(4) 実特異点論をホモトピー論に応用することが本研究のキーポイントであり、関連して、Arnold や Vassiliev の研究を共同研究者の Kozłowski 教授と e-mail と skype を通して連絡をとりながら共同研究を実施した。

(5) さらに、2014年3月には、電気通信大学で、Kozłowski 教授が来日記念に、「電通大トポロジーセミナー」を電気通信大学で主催し、同時に本研究に関連するトーリクトポロジーの研究も話題  $n$  と取り上げて開催した。この方面のトポロジー的側面の第一人者の岸本准教授 (京都大学)、入江教授 (大阪府立大学)、蓮井氏 (京大大学院) にもトーリクトポロジーに関する最近の研究について講演してもらい研究連絡もおこなった。

4. 研究成果

(1)  $K=\mathbb{R}, \mathbb{C}$  のとき、実代数的  $K$ -ベクトル束上のストーン・ワイエルシュトラス型定理を利用して、affine 実代数的多様体  $M$

が,  $M$  上の任意のベクトル束が代数的束と (安定) 同値となる時, 包含写像  $i: \text{Alg}(M, N) \rightarrow \text{Map}(M, N)$  が,  $N$  が  $K$  上のグラスマン多様体のときにはホモトピー同値写像になることを Kozłowski 教授 (ワルシャワ大学) と M. Adamaszek 氏 (Univ. Warwick) との共同研究で証明し雑誌 Quart. J. Math. に発表した.

- (2) (1)の結果を利用して,  $K=R$  で  $M, N$  が実射影空間の場合に, (1)の包含写像を  $d$  次元斉次多項式のなす部分空間  $\text{Alg}_d(M, N)$  に制限するとき,  $d$  で定まるある次元までホモトピー同値 (あるいはホモロジー同値) であることを, Vassiliev 型 spectral sequence を利用して, Kozłowski 氏と Adamaszek 氏との共同研究で証明し, この結果も雑誌 Quart. J. Math. に発表した.
- (3) Kozłowski 教授 (ワルシャワ大学) とのその後の共同研究で, truncated 型 Vassiliev spectral sequence を利用して, (2)のホモトピー同値 (あるいはホモロジー同値) となる次元の計算の改良にもその後成功し雑誌 Topology Appl. に発表した.
- (4) (2), (3)の結果の応用として,  $M$  が  $m$  次元実射影空間,  $N$  が  $n$  次元実射影空間のときに, 写像空間  $\text{Map}(M, N)$  のホモトピー群を具体的にある程度の次元まで計算することに成功した.
- (5) 上記と同様な問題を,  $M$  が  $m$  次元実射影空間で,  $N$  が複素  $n$  次元射影空間のときに, 包含写像  $i: \text{Alg}_d(M, N) \rightarrow \text{Map}(M, N)$  に対して考察した. とくにこの場合, この包含写像がどの程度の次元までホモトピー型を近似するかを具体的に計算することができ, この結果を雑誌 RIMS Kokyuroku Bessatsu に発表した.
- (6) 包含写像  $i: \text{Alg}_D(M, N) \rightarrow \text{Map}(M, N)$  を  $M$  が  $m$  次元実射影空間,  $N$  が滑らかなコンパクト toric variety の場合に, 上記(1)~(5)の結果の拡張ができないかを, 大野氏 (電通大) と Kozłowski 氏 (ワルシャワ大学) と共同で研究をおこなった. これについては, Toric 多様体  $N$  に対応する fan の 1 次元の cone 達の情報を調べることで, (1)~(5)の結果の一般化を得ることに成功した. この結果については現在論文投稿中である.
- (7)  $M$  が 1 次元複素射影空間で,  $N$  がコンパクトでない toric variety のときに  $M$  から  $N$  への正則写像全体のなす空間を  $\text{Hol}(M, N)$  とした時,  $\text{Hol}(M, N)$  から連続写像全体の空間  $\text{Map}(M, N)$  への包含写像  $i$  を考える. このときに, 包含写像がどの程度の次元まで  $\text{Map}(M, N)$  のホモトピー型を近似するかを, Kozłowski との共同研究で考えた. ある non-compact toric 多様体について得られた以前の結果については, その近似次元の改良に成功

した. この研究についても Kozłowski 氏との共著論文を現在準備中である.

- (8) 代数 (整数論) の研究分担者は, 主に与えられた有限群をガロア群に持つパラメータ付き多項式の構成を試み, またその数論を計算機による実験を通して調べた.
- (9) 低次元トポロジーの研究分担者は, 主にデーモン手術によって双曲的な結び目からでも例外的に双曲的でない 3 次元多様体が生じる現象「例外的手術」を研究した. とくに, これを利用して特殊な 4 次元多様体を構成することを研究した. 具体的な研究結果は以下である: まず, 門上氏 (華東師範大学, 中国) との共同研究で torsion に関する論文作成を行った.  
さらに, 丹下氏 (筑波大学) が主催する, 若手研究者のサーベイ講演を行い, Ribbon かつ Fibred なノットのモノドローミーの分析手法の解説も行った. またレンズ空間手術の中で最も希少な族の divided knot 表示を考察した. これについては, 論文投稿中である.
- (10) 代数幾何学の研究分担者は, 代数閉体  $K$  上定義された斉次 1 次式を成分に持つ maximal minor の性質について, Eagon-Northcott 複体を用いて, 伊東氏 (電通大) と野間氏 (横浜国立大) と共同研究を行った.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

- (1) A. Kozłowski, M. Ohno, K. Yamaguchi, The space of maps from a real projective space to a toric variety, 数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1876, 120-125 (2014)
- (2) A. Kozłowski, K. Yamaguchi, Spaces of equivariant algebraic maps from real projective spaces into complex projective spaces, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, vol. 39, 51-61 (2013)
- (3) A. Kozłowski, K. Yamaguchi, Simplicial resolutions and spaces of algebraic maps between real projective spaces, Topology a Appl., 査読有, vol. 160-1, 87-98 (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2012.09.019>
- (4) K. Yamaguchi, Note on the homotopy of spaces of maps between real projective spaces, Math. J. Okayama Univ., 査読有, vol. 54, 77-86 (2012)
- (5) M. Adamaszek, A. Kozłowski, K. Yamaguchi, Spaces of algebraic and continuous maps between real algebraic varieties, Quart. J. Math., 査読有, vol. 62-4, 771-790 (2011)
- (6) K. Yamaguchi, On the spaces of

equivariant maps between real algebraic varieties, 数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1732, 42-50 (2011)

(7) T. Kadokami, Y. Yamada, Lens space surgeries along certain 2-component links related with Park's rational blow down and Reidemeister-Turaev torsion, Aust. Math. Soc., 査読有, vol. 96-1, 78-126 (2014)

Doi: 10.1017/S1446788713999372

(8) M. Tange, Y. Yamada, Four dimensional manifolds constructed by lens space surgeries along torus knots, J. Knot Theory and the Ramifications, 査読有, vol. 21-11, 1-65 (2012)

Doi: 10.1142/S0218216512501118

(9) T. Kadokami, Y. Yamada, Lens space surgeries along two component links and Reidemesiter-Turaev torsion, 数理解析研究所講究録, 査読無, vol. 1747, 67-78 (2011)

(10) M. Kida, Y. Urawa, Involutions on generating functions, J. Integer Seq., 査読有, vol. 13,1,6, 29pp (2013)

(11) M. Kida, On metacyclic extensions, J. Theor. Nombres Bordeaux, 査読有, vo. 24, 339-353 (2012)

(12) M. Ohno, H. Terakawa, A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two of hyperquadrics, Annali dell'Universit  di Ferrara, (to appear),

Doi: 10.1007/s11565-013-0188-6

〔学会発表〕(計 16 件)

(1) A. Kozłowski, M. Ohno, K. Yamaguchi, The homotopy of maps to toric varieties, 研究集会「電通大トポロジーセミナー」, 電気通信大学, (2014.3.7)

(2) 山口耕平, What is a toric variety?, 研究集会「電通大トポロジーセミナー」, 電気通信大学, (2014.3.6)

(3) 山口耕平, On the homotopy of the space of maps to toric varieties, 研究集会「2013年度ホモトピーシンポジウム」, 岡山大学理学部, (2013.11.3)

(4) 山口耕平, On the spaces of algebraic maps to toric varieties, RIMS 研究集会「変換群とその周辺」, 数理解析研究所, (2013.5.30)

(5) 山口耕平, Spaces of maps to toric varieties, 岡山大学理学部数学教室談話会, 岡山大学理学部 (2013.2.13) <http://www.math.okayama-u.ac.jp/extension.html>

(6) 山口耕平, Simplicial resolutions and their related topics, 研究集会「城崎ホモトピー論研究集会」, 兵庫県城崎福祉会館, (2011.11.4)

(7) 山口耕平, Truncated simplicial resolutions and spaces of algebraic maps, RIMS 研究集会「変換群の幾何と組

み合わせ論」, 数理解析研究所 (2011.6.15)

(8) 山田雄一, 4-manifolds constructed by lens space surgeries, 研究集会「4次元トポロジー」, 広島大学理学部, (2012.11.15)

(9) 山田雄一, Divide knots presentations of sporadic knots of Berge's lens, 研究集会「東北大学結び目セミナー2012」, 山形大学, (2012.9.20)

(10) 山田雄一, 研究集会「レンズ空間手術から構成する4次元多様体, 広島大学トポロジー・幾何セミナー」, 広島大学, (2011.7.5)

(11) 木田雅成, 計算代数学のためのソフトウェア Magma, 数学ドキュメントとフリードキュメント /13, 信州大学, (2012.11.27)

(12) 木田雅成, 巡回多項式族の構成とその数論, 埼玉大学談話会, 埼玉大学, (2012.11.2)

(13) 大野真裕, A spectral sequence and nef vector bundles of the first Chern class two of hyperquadrics, 代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学理学部, (2014.3.6)

(14) 島川和久, 微分空間のホモトピー論, 研究集会「春の代数的位相幾何学セミナー」, 岡山大学, (2014.3.24)

(15) 島川和久, Diffeology 入門, 研究集会「Diffeology in Karatsu」, 唐津市市民交流プラザ, (2013.12.20-22)

(16) 島川和久, 微分空間のホモトピー論をめぐって, 研究集会「第39回変換群シンポジウム」, 東京理科大学・森戸記念館, (2012.11.24)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://kjk.office.uec.ac.jp/Profiles/4/0000339/profile.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
教授  
研究者番号： 00175655

### (2) 研究分担者

木田 雅成 (KIDA MASANARI)  
東京理科大学・理学部・教授  
研究者番号： 20272057

### (4) 研究分担者

山田 雄一 (YAMADA YUUICHI)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
教授  
研究者番号： 30303019

### (4) 研究分担者

大野 真裕 (OHNO MASAHIRO)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
准教授  
研究者番号： 70277820

### (5) 研究分担者

島川 和久 (SHIMAKWA KAZUHISA)  
岡山大学・自然科学研究科・教授  
研究者番号： 70109081