様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：１７２０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４００８０

研究課題名（和文）ケーラー・リッチ流と偏極代数多様体の安定性

研究課題名（英文）Kaehler-Ricci flows and the stability for polarized algebraic manifolds

研究代表者
中川　泰宏（NAKAGAWA, Yasuhiro）

佐賀大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：９０２５０６６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：まず,Einstein・Kaehler 計量の一般化である,Kaehler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kaehler 類の場合に一般化することに成功し,さらにその非自明な例を構成した.次に,トーリックでない Einstein・佐々木計量の例を構成することができた.そして第三に Nill・Paffenholz による非対称な Einstein・ Kaehler トーリックFano 多様体の例を高次元の場合へ一般化することに成功した.

研究成果の概要（英文）：Firstly, we have generalized the notion of Kaehler-Ricci solitons to the case of general polarized manifolds, which are called “generalized Kaehler-Ricci solitons”. Moreover, we have constructed a non-trivial example of a generaliezed Kaehler-Ricci soliton. Secondary, we have constructed new examples of non-toric Einstein-Sasaki manifolds. Thirdly, we have constructed higher dimensional generalizations of exmaples, due to Nill and Paffenholz, of non-symmetric Einstein-Kaehler toric Fano manofolds.

研究分野： 複素微分幾何学

キーワード： Einstein・Kaehler 計量　幾何学的不変式論　安定性　Kaehler・Ricci ソリトン　Kaehler・Ricci 流

１．研究開始当初の背景

Kähler 多様体上の正則ベクトル束に Einstein・Hermitian 計量と呼ばれる良い計量が存在することと，その正則ベクトル束が Mumford・竹本の意味で安定であることが同値であるという結果が 1980 年代に小林・Lübke・Donaldson・Uhlenbeck・Yau らによって示され,「小林・Hitchin 対応」として知られている。この結果により，正則ベクトル束のモジュライ空間を微分幾何学的に研究することが可能となった.

同様に偏極代数多様体のモジュライ空間の問題を考えると，偏極代数多様体上に定スカラー曲率 Kähler 計量が存在することと，その偏極代数多様体が幾何学的不変式論の意味で安定であることとが，同値であることが期待される. これがいわゆる「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」あるいは「Donaldson・Tian・Yau 予想」と呼ばれるものである.

この予想を肯定的に示すことができれば，代数幾何学における重要な研究対象である，偏極代数多様体のモジュライ空間を微分幾何学の手法を用いて研究することが可能となり，例えば，Gromov 等により研究が進められている Riemann 多様体の崩壊に関する理論等を用いることができるであろう.

しかし，幾何学的不変式論の枠組みではいろいろな安定性を考えることができるので,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を考えるときに，どの安定性を採用すべきかということがまず問題となる.

最近の Tian・Donaldson・満渕等の研究により,「多様体に対する小林・Hitchin 対応」について，少しずつではあるが状況がはっきりしてきつつある.　そこで，以下のような問題を考えるに至った.

(1)この関係をより精密なものとし，定スカラー曲率 Kähler 計量の存在と同値であるような幾何学的普遍式論の枠組みでの偏極代数多様体の安定性の概念を構成したい.

(2)さらに Fano 多様体の時には，この安定性を Kähler・Ricci 流を通して考察したい.

(3)またその対応において，定スカラー曲率 Kähler 計量の一般化である端的 Kähler 計量や Kähler・Ricci ソリトン，さらには Einstein・佐々木計量がどのような位置付けとなるかも決定したい.

２．研究の目的

本研究では「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」をより深くかつ正確に理解し，さらにはその解決を目指した. 実際には,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」の解決は非常に難しくかつ重要な問題なので，まずは幾何学的不変式論の枠組みにおいて，どのような安定性を考えるのが良いのかということから考察していき，その安定性の下で,「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」を，部分的な形ででも良いので示すことを目指した. また，その枠組みの中で定スカラー曲率 Kähler 計量の一般化にあたる端的 Kähler 計量がどういった位置付けになるかを判明させることを目指した.

一方，Donaldson・Uhlenbeck・Yau による元々の正則ベクトル束の場合の「小林・Hitchin 対応」の解決においては，熱流の方程式が非常に重要な役割を演じた. Ricci 曲率に関連した方程式としては，Perelman による Poincaré 予想の解決に用いられた Ricci 流の方程式がある. この Ricci 流の方程式は近年盛んに研究され，いろいろな問題において成功を修めている.

そこで，本研究では Kähler・Ricci 流の方程式を深く研究することにより,「Fano 多様体に対する小林・Hitchin 対応」の解決を(部分的な形でも良いので)目指した. 実際，Cao は 1980 年代に第一 Chern 類が負または零の時に、Einstein・Kähler 計量の存在を Kähler・Ricci 流を用いて示している. また，この方針での研究がうまく進めば，Einstein・Kähler 計量の一般化である Kähler・Ricci ソリトンおよび，その一般の偏極への一般化(これを「一般化された Kähler・Ricci ソリトン」と呼ぶことにする)が幾何学的不変式論における安定性からの観点において，どのような位置付けになるかも判明させることを目指した.

３．研究の方法

（１）「偏極代数多様体に対する小林・Hitchin 対応」において，重要な役割を演じている K エネルギーの観点から, Einstein・Kähler 計量の一般化である, Kähler・Ricci ソリトンを考察し（このとき，考えている Kähler 類は反標準類となる), Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することを考察する。この問題は元々は Tian により考察されたものであるが，彼の定式化には少し問題があった. よって，その問題をうまく回避するような定式化を考案する.

（２）トーリックでない Einstein・佐々木計量の構成を考える. 具体的には，ある種の Einstein・ Kähler 多様体上の複素射影直線束の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成することを考える. これは Einstein・ Kähler 多様体上の複素射影直線束上で，常微分方程式を解くこと

により Einstein・ Kähler 計量の存在を示した坂根・小磯・満渕等の方法を我々の場合に展開してやり，最終的には Reeb 場をうまく選ぶことにより Einstein・佐々木計量を構成したい．

（３）Nill・Paffenholz による非対称な Einstein・ Kähler トーリック Fano 多様体の 7 次元と 8 次元の例を高次元の場合に一般化したい．さらに，7 次元の例が持っている種々の性質について，構成できた一般化も同様な性質を持っていないかについて考察する．

４．研究成果

（１）まず K エネルギーの観点から，Einstein・ Kähler 計量の一般化である，Kähler・Ricci ソリトンを考察し，Kähler・Ricci ソリトンを反標準類とは限らない一般の Kähler 類の場合に一般化することに成功した．この一般化は Tian により考察されたものが持っていいた問題点をうまく回避するような定式化となっている．さらにこの一般化された Kähler・Ricci ソリトンの非自明な例を構成した．

（２）次に， トーリックでない Einstein・佐々木計量の構成した．坂根・小磯・満渕等が，ある種の Einstein・ Kähler 多様体上の複素射影直線束の上に Einstein・ Kähler 計量の存在に対する必要十分条件を与えたが，その Fano 多様体の標準束に付随した単位円周束上に Einstein・佐々木計量を構成した．

（３）最後に Nill・Paffenholz による非対称な Einstein・ Kähler トーリック Fano 多様体の 7 次元と 8 次元の例を高次元の場合への一般化に成功した．さらに，構成した一般化のうちの比較的単純なものについては，7 次元の例と同様に，漸近的 Chow 半安定でないことを示した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Yasuhiro Nakagawa, On generalized Kähler-Ricci solitons, Osaka Journal of Mathematics 48(2011), 497 -- 513, 査読有.

② Toshiki Mabuchi and Yasuhiro Nakagawa, New examples of Sasaki-Einstein manifolds, Tohoku Mathematical Journal 65(2013), 243 -- 252, 査読有.

③ Yasuhiro Nakagawa, On the examples of Nill and Paffenholz, International Journal of Mathematics 26(2015), 査読有.

〔学会発表〕（計 7 件）

① 中川 泰宏，佐々木・Einstein 多様体の新しい例について，福岡大学微分幾何研究会，2012 年 11 月 1 日，福岡大学セミナーハウス(福岡県).

② 中川 泰宏，On the exmaples of Nill-Paffenholz，第 19 回複素幾何シンポジウム，2013 年 11 月 2 日，信州菅平プチホテルゾンタック(長野県).

③ 中川 泰宏，Nill・Paffenholz の例について，福岡大学微分幾何研究会，2013 年 11 月 3 日，福岡大学セミナーハウス(福岡県).

④ 中川 泰宏，Nill・Paffenholz の例の高次元化について，代数多様体とその周辺，2014 年 10 月 2 日，琉球大学理学部(沖縄県).

⑤ 中川 泰宏，Nill・Paffenholz の例について(その 2)，福岡大学微分幾何研究会，2014 年 11 月 2 日，福岡大学セミナーハウス(福岡県).

⑥ 中川 泰宏，Nill・Paffenholz の例の一般化について，淡路島幾何学研究集会 2015，2015 年 1 月 23 日，淡路島国民宿舎慶野松原壮(兵庫県).

⑦ 中川 泰宏，Nill・Paffenholz の例の一般化について，満渕俊樹教授退職記念小研究会，2014 年 3 月 12 日，大阪大学理学部(大阪府).

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

なし

６．研究組織
(1)研究代表者
　中川 泰宏（NAKAGAWA, Yasuhiro）
　佐賀大学・工学系研究科・教授
　研究者番号：９０２５０６６２

(2)研究分担者
　　　　　　　（　　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者
　　　　　　　（　　　）

　研究者番号：