

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 21 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540081

研究課題名(和文) 四元数ケーラー多様体内の部分多様体のツイスターリフトと四元数複素微分幾何学

研究課題名(英文) Twistor lifts for submanifolds in quaternion Kaehler manifolds and quaternionic complex differential geometry

研究代表者

長谷川 和志 (Hasegawa, Kazuyuki)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：50349825

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)： 四元数構造を保つ接続の取り方によらない不変量を、接続を分解することで求め、部分多様体の幾何学量と関連付けた。特に、これらの量とチャーン類等の位相的な量との関係を得た。応用として、低次元の場合に、ツイスター正則な曲面の法束のオイラー数に関する T. Friedrich による不等式を改良することができた。また、四元数ケーラー多様体内のツイスターリフトが調和切断となる部分多様体の研究にも取り組んだ。曲面の場合には、ツイスター正則な曲面のツイスターリフトが調和切断になるなどの結果を得た。これは、Leschkeらによって得られている事実の一般化ともとれる。

研究成果の概要(英文)： We find some invariants which are independent of the choice of connections preserving the quaternion structure. We study the relations among those invariants and extrinsic quantities for submanifolds, in particular, topological ones. As an application, an inequality for the Euler number of the normal bundle of a twistor holomorphic surface, which is given by T. Friedrich, can be improved. We also study submanifolds in quaternion Kaehler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections. As a special case, we see that the twistor lift of a twistor holomorphic surface in a quaternion Kaehler manifold is a harmonic section. It is a generalization of a Leschke's result.

研究分野：微分幾何学

キーワード：ツイスターリフト ツイスター空間 四元数多様体

1. 研究開始当初の背景

近年、研究代表者の長谷川は、ツイスターリフトが調和切断となる曲面を研究していた。ここで、一般に調和切断 (harmonic section) とは、コンパクトなリーマン多様体上の標準計量の与えられたリーマンベクトル束の切断で長さが 1 であるものの空間にエネルギー汎関数を制限し、その制限された汎関数の停留点を与える切断を指す。このような曲面は、研究代表者によって初めて研究された対象と思われるが、近年、F. Burstall らによって可積分系の観点からも研究されている。

一方、4 次元球面の曲面の共形幾何を研究するために、四元数正則曲面理論とよばれる理論が、U. Pinkall らによって、定式化された。現在、理論の創設者の他、研究分担者の守屋によって活発に研究されている。

また、四元数射影空間内の (実) 半次元のケーラー部分多様体の研究は、上記の四元数正則曲面理論の高次元化とみることができ、これらは四元数複素微分幾何学ともいふべき範疇で扱われる対象となっており、このような部分多様体は、連携研究者の塚田や D. Alekseevsky, S. Marchiafava らによって研究されている。

以上の理論は、互いに関係があるにもかかわらず、これまであまり密接に関連付けられてこなかったが、豊富な内容を持つこれらの理論を融合させることは重要と思われる。

2. 研究の目的

これまで研究代表者らが行ってきた研究分野である曲面のツイスターリフトの研究と四元数正則曲面理論を融合させ、さらにこれを高次元化し、四元数ケーラー多様体内の複素部分多様体をツイスター空間およびこの空間へのツイスターリフトを用いて研究することである。この高次元化は単なる低次元の場合の類似ではなく、複素幾何学と四元数微分幾何学が相互作用する四元数複素微分幾何学とよばれる興味深い研究領域をなしている。本研究課題では、いくつかの具体的な問題の解決を通じて、四元数複素微分幾何学の深化・発展を目的とした。

3. 研究の方法

向き付けられた 4 次元リーマン多様体内の向き付けられた曲面に対して、ツイスターリフトとよばれる外空間のツイスター空間への写像が定義できる。また、四元数正則幾何においては、四元数の代数構造に付随して、曲面の左法ベクトル場とよばれるものが定義でき、これにより曲面を調べることができ

る。なお、左法ベクトル場は、ツイスターリフトと同一視できる。つまり、四元数の代数構造を一般化することにより、この理論の一部はツイスターリフトの研究に含まれる。そこで、まずはこの二つの関係をより深く解析することで、本研究課題の基礎とした。

また、4 次元リーマン多様体内の向き付けられた曲面のツイスターリフトは、四元数ケーラー多様体内の複素構造をもつ部分多様体の場合に自然に拡張できる。曲面のツイスターリフトについては特に、ツイスターリフトが水平写像となる超極小曲面 (Bryant, Calabi 等) や、より一般のツイスター正則な曲面 (Friedrich) とよばれるものが、多く研究されているが、これらの概念も同様に拡張される。その上で、低次元の場合の、これまでの研究結果や四元数正則幾何における手法等も参考に研究を進めた。

4. 研究成果

まず、ツイスターリフトを四元数正則幾何の観点から精査し、ツイスターリフトが調和切断となる曲面の特徴付け等を得た。例えば、ツイスターリフトが調和切断であること、平均曲率ベクトル場が正則切断であること、左法ベクトル場が調和写像であることが、それぞれ互いに同値であることが分かった。これにより、ツイスターリフトが調和切断となる曲面 (やより一般に部分多様体) の研究には、複素幾何や調和写像の理論が援用できる。

次に、複素ベクトル束において、一般に複素構造を平行にすると限らない接続を考え、この接続を 4 つの成分に分解し、その各成分が接続の変形でどのように変化するかを調べた。特に、四元数構造を保つ接続に関して不変となる量を求め、その不変量をチャーン類等を用いて表した。4 次元の場合、共形変換は四元数構造を保つので、この場合は共形不変量とチャーン類等の位相不変量との関係が得られることになるが、実際に、ツイスター正則な曲面の共形面積と法束の第一チャーン類との間に成り立つ不等式を得た。これによって、Friedrich の結果を改良できた。高次元の場合には、共形変換は四元数構造を保つとは限らないので、ここでの議論は使えないが、共形面積に類する幾何学量を構成し研究を今後も進めたいと考えている。

また、四元数射影空間内の超極小部分多様体の構成に関する研究を行った。これに関しては、D. Alekseevsky らにより、局所的な表示が得られている。研究代表者の長谷川と分担者の守屋で議論を重ね、多重超共形写像という写像の概念を導入することで、超極小より広いクラスのツイスター正則な部分多様体を記述することが可能であることが分かった。この多重超共形写像がいかなる性質をもつときに、超極小となるかを考えることで

その構成が可能であると考えているが、まだ実現に至っていないので今後の課題としたい。

四元数ケーラー多様体内のツイスターリフトが調和切断となる部分多様体の研究にも取り組んだ。これは、研究代表者が過去に4次元多様体内の曲面の場合に研究を行ってきたものの一般化にあたる。部分多様体の次元が2、すなわち曲面の場合には、ツイスター正則な曲面のツイスターリフトが調和切断になるなどの結果を得た。これは、Leschkeらによって得られている事実の一般化ともとれる。同時に、ここで的手法を参考に、ツイスターリフトが正則となるアファインはめ込みに関していくつかの結果を得た。

研究分担者及び連携研究者は、上記の研究成果に関するものの他に、K. Leschkeとともに、極小曲面のドレッシングに関して研究を行い、そのなかでシンプルファクタードレッシングに関して研究を進め、いくつかの結果を得たり(守屋)、複素グラスマン多様体内の全実部分多様体の研究を行って、複素グラスマン多様体のツイスター空間を具体的に表示することによって複素射影空間内の複素部分多様体から全実部分多様体が構成できることなどを示した(塚田)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

K. Hasegawa, The first Chern class and conformal area for a twistor holomorphic immersion, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 84 (2014), 67-83. 査読有。

K. Hasegawa, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, *SUT J. Math.*, 50 (2014), 325-341, 査読有。

K. Moriya, Darboux transforms of a harmonic inverse mean curvature surface. *Geometry*, vol. 2013, Article ID 902092, 9 pages, 2013. [doi:10.1155/2013/902092]. 査読有。

K. Hasegawa, A Lorentzian surface in a four-dimensional manifold of neutral signature and its reflector lift, *J. Geom. Symmetry Phys.*, 26 (2012), 71-83. 査読有。

K. Moriya, Description of a mean curvature sphere of a surface by quaternionic holomorphic geometry, *数理解析研究所講究録*, 第1817巻(2012), 1-5. 査読無。

K. Moriya, Simple factor dressing of a minimal surface, *数理解析研究所講究録*, 第1817巻(2012), 6-10. 査読無。

S. Kurosu and K. Moriya, A tt^* -bundle associated with a harmonic map from a Riemann surface into a sphere.

Differential geometry and its applications, 30 (2012), 227-232. 査読有。
K. Moriya, A condition for a closed one-form to be exact. *Advances in applied Clifford algebra*, 22(2012), 433-448. 査読有。

[学会発表](計 15 件)

長谷川和志, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, 日本数学会年会幾何学分科会, 明治大学(東京都・千代田区), 2015年3月22日。

守屋克洋, 極小曲面のシンプル・ファクター・ドレッシング, 日本数学会年会幾何学分科会, 明治大学(東京都・千代田区), 2015年3月21日。

長谷川和志, ツイスター正則なアファイン曲面について, 統計多様体の幾何学とその周辺(6), 北海道大学(北海道・札幌市), 2015年3月10日。

長谷川和志, ツイスターリフトを持つアファインはめ込みに対する種々の射影不変量, 統計多様体の幾何学とその周辺(6), 北海道大学(北海道・札幌市), 2015年3月9日。

塚田和美, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, The 9th OCAMI-KNUHGGRG Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Geometry and Lie Theory, 大阪市立大学(大阪府・大阪市), 2015年2月13日

塚田和美, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学(広島県・東広島市), 2014年9月25日。

塚田和美, Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of 2-planes, 四元数複素幾何学とその周辺, お茶の水女子大学(東京都・文京区), 2014年9月4日。

長谷川和志, Twistor holomorphic affine surfaces and projective invariants, 四元数複素幾何学とその周辺, お茶の水女子大学(東京都・文京区), 2014年9月4日。

長谷川和志, The first Chern class and conformal area for a twistor holomorphic immersion, 日本数学会年会幾何学分科会, 学習院大学(東京都・豊島区), 2014年3月15日。

守屋克洋, 四元数射影空間内のウィルモア正則曲線(その1), 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」, 山口県健康づくりセンター(山口県・山口市), 2014年2月13日。

守屋克洋, 四元数射影空間内のウィルモア正則曲線(その2), 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」, 山口県健康づくり

センター（山口県・山口市），2014年2月13日．

K. Hasegawa, The first Chern class and conformal area for a twistor holomorphic immersion, International Conference "Differential Geometry and its Applications", Brno (Czech), 2013年8月20日.

K. Hasegawa, Lorentzian surfaces in pseudo-Riemannian space forms and their reflector lifts, 第8回日中友好幾何学研究集会, 成都（中国）, 2012年9月10日.

長谷川和志, ツイスターリフトが調和切断となる自己双対アインシュタイン多様体内の種数0の曲面について, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用2012」, 東京理科大学森戸記念館（東京都・新宿区）, 2012年9月3日.

長谷川和志, ツイスターリフトが調和切断となる自己双対アインシュタイン多様体内の種数0の曲面について, 第59回幾何学シンポジウム, 九州大学（福岡県・福岡市）, 2012年8月28日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ed.kanazawa-u.ac.jp/~kazuhas/e/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長谷川 和志 (HASEGAWA Kazuyuki)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：50349825

(2) 研究分担者

守屋 克洋 (MORIYA Katsuhiko)

筑波大学・数理物質科学研究科(系)・助教

研究者番号：50322011

(3) 連携研究者

塚田 和美 (TSUKADA Kazumi)

お茶の水女子大学・人間文化創成科学研究科・教授

研究者番号：30163760