

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 9 月 19 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540083

研究課題名(和文) クライン群の変形空間の境界挙動

研究課題名(英文) Boundaries of deformation spaces of Kleinian groups

研究代表者

糸 健太郎 (Ito, Kentaro)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：00324400

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：クライン群の変形空間の境界挙動について研究した。特に1点穴あきトーラス群の変形空間において、トレースが2に近いリニア・スライスがトレースが2のリニアスライス(マスクット・スライス)に近づく/近づかない様子を明らかにした。これはBrombergによる変形空間の非局所連結性の理論をトレース座標を用いて捕らえなおしたことに対応する。また2点穴あきトーラス群の変形空間の研究も行った。さらに3次元双曲多様体の中の全測地的平面の分布に関する研究も開始した。このことは3次元ドジッター空間へのクライン群の作用を調べることに対応する。

研究成果の概要(英文)：I studied boundary behavior of deformation spaces of Kleinian groups. Especially, I studied the deformation space of the once-punctured torus group and made clear that how linear slices of traces close to 2 converge or not converge to the linear slice of trace 2 (Maskit slice). This is obtained from Bromberg's theory of non-local connectivity of the deformation space by using the trace coordinates. I also studied the deformation space of the twice-punctured torus groups. In addition, I started a research of distributions of totally geodesic planes in hyperbolic 3-manifolds. This corresponds to the study of actions of Kleinian groups on the 3-dimensional de-Sitter space.

研究分野：幾何学

キーワード：双曲幾何 クライン群

1. 研究開始当初の背景

クライン群とは双曲空間の等長写像群の離散部分群の事であり、双曲空間のクライン群による商多様体は双曲多様体となる。従ってクライン群の変形を考えることは3次元双曲多様体の変形を考えることに対応する。ここでは境界付きコンパクト多様体の内部に入る完備双曲構造を考える。双曲多様体が有限体積のときは剛性があり変形できないが、無限体積のときは変形の自由度があり、それは理想境界に入る等角構造の変形の自由度に対応する。従って、クライン群の変形空間を群の表現空間の中に実現したときに、その内部は商多様体の理想境界に現れるリーマン面のタイヒミュラー空間と同一視できて多様体の構造を持つのであるが、その境界の挙動はかなり複雑であることが近年認識されてきている。例えば変形空間は有限もしくは無限個の連結成分をもち、それらが境界で接触している現象が Anderson-Canary によって見いだされている。さらにクライン群が曲面群と同型るとき、変形空間の連結成分はただ1つなのであるが、この場合も変形空間は境界において自己接触していることが McMullen によって見いだされている。その後 Bromberg や Magid によって、曲面群の変形空間の境界は局所連結でないことも示されている。一方で、曲面群の変形空間を曲面上の複素射影構造の空間に持ち上げて考えると、対応する連結成分は無限個現れるのであるが、任意の2つのこれらの成分は境界で接触する事を私は明らかにした。これらクライン群の変形空間の接触・自己接触の様子は、複素力学系におけるマンデルブロー集合の連結成分の接触と対比してみることもできる。さて、変形空間の接触・自己接触と並んで、より理解の難しい現象として Kerckhoff-Thurston が見いだした現象がある。これは「写像類群のベアス・スライスへの作用が連続拡張しない」というものである。クライン群論において長年の問題であった「エンドの情報による群の分類」(多様体のエンドの情報と変形空間の境界点との対応)は近年 Minsky らによって完成したのであるが、この Kerckhoff-Thurston の現象は、エンドの情報と境界点の対応に不連続性があることを示している。この現象の解明は現在のクライン群論において最も重要な課題の一つである。

2. 研究の目的

上のような背景のもとで、クライン群の変形空間の境界挙動の様子をさらに解明することを目的とする。また、より広く双曲幾何学一般に関係する話題の研究も行う。具体的には次のような研究を行うことを目的とする。

(1) 1点穴あきトーラスの変形空間の研究。クライン群が1点穴あきトーラス群のときは、変形空間が複素2次元となり、群の表示を具体的に書き表すことが出来るので、精緻な研

究を行うことが可能である。例えば Bromberg の非局所連結性も本質的に1点穴あきトーラスの場合を用いている。この場合により深く変形空間の境界挙動を理解することを目的とする。

(2) 1点穴あきトーラス群の場合には次元が低く Keckhoff-Thurston 現象が起こらないので、この現象を観察するために、次に扱いやすい対象である2点穴あきトーラス群の変形空間を研究する。

(3) その他の双曲幾何に関する研究。特にリーマン面上の測地流やホロサイクル流の一般化を考察する。

(4) 双曲幾何全般における情報交換・収集の目的のために研究集会や勉強会を開催する。

3. 研究の方法

(1) 1点穴あきトーラスの変形空間の境界挙動を理解するために、特に生成元のトレースを用いたトレース座標を用いて変形空間の境界挙動を理解する。具体的には Bromberg の導入した座標とトレース座標の関係を明らかにする。

(2) Keckhoff-Thurston 現象の解明に向けて、2点穴あきトーラス群の変形空間を研究する。具体的にはその境界に現れるマスクット・スライスに注目する。

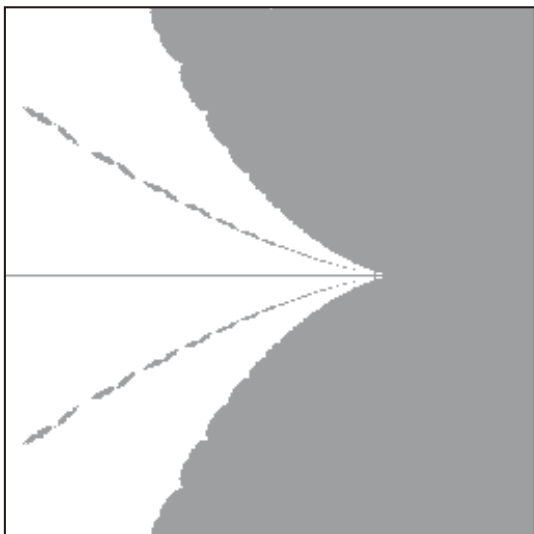
(3) リーマン面の測地流の一般化を考察するために葉の次元を上げて、3次元双曲多様体の全測地的面の分布について考察する。

(4) 幾つかの研究集会を開催するとともに、特に Fathi-Laudenbach-Poenaru による Thurston's work on surfaces" をテキストに勉強会を行い、曲面上の測度付き葉層構造やタイヒミュラー空間のサーストン・コンパクト化についての知識を深める。

4. 研究成果

(1) 1点穴あきトーラス群の変形空間の研究。特に生成元のトレースを用いたトレース座標を用いて変形空間の境界挙動を理解するための研究を行った。1つの生成元のトレースを固定した時の変形空間の切り口をリニア・スライスという。特にトレースの値が2のときのリニア・スライスをマスクット・スライスという。トレースの値が2に収束するときに対応するリニア・スライスがマスクット・スライスにどのように近づくかまたは近づかないかを調べた。より正確には、リニア・スライスの Hausdorff 極限がマスクット・スライスに一致する場合と真に大きくなる場合を完全に特徴付けた。Bromberg は「1点穴あきトーラス群の変形空間は局所連結でない」という結果を得ているが、彼がそこで導入した座標とトレース座標の関係を明らかにする形で、上述の結果に証明を与えた。厳密な議論を行う際に多くの努力が必要であった。また、局所連結ではないリニア・スライスの存在も示した。次図はその様子を示すコンピュータ画像である。グレーの部分が

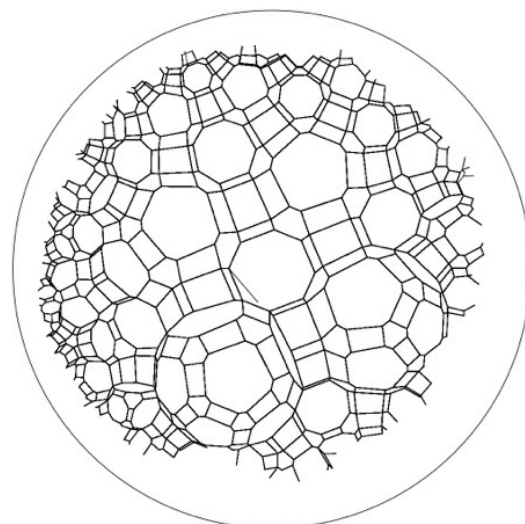
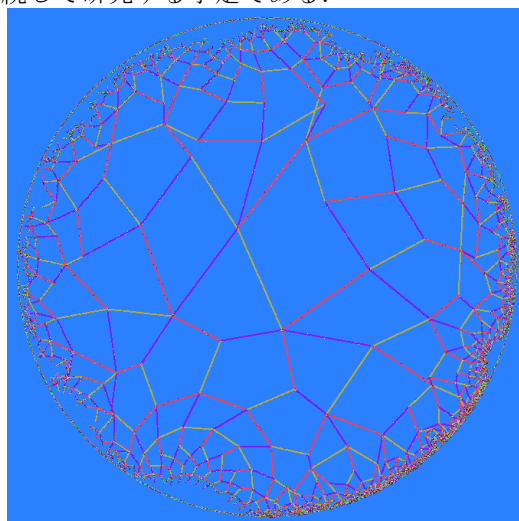
リニア・スライスであり，無限個の連結成分が1点に集積している様子が見て取れる。



(2) 2点穴あきトーラス群空間の研究. 1点穴あきトーラス群の変形空間は次元が低く Kerckhoff-Thurston 現象は観察されないため，この現象が観察できる最もシンプルな研究対象として2点穴あきトーラス群の変形空間を研究した. 特にその空間の境界に現れる複素2次元パラメータのマスクット・スライスを考察し，その境界挙動を調べた. 具体的にはこのマスクット・スライスの中に1点穴あきトーラスのマスクット・スライスと4点穴あき球面のマスクット・スライスのコピーが分布する様子を調べ，ある種の不連続性を観察した. また，この周辺の技術の情報交換の場として2012年の3月にWorkshop「クライン群とコンピュータ・グラフィックス」を開催した.

(3) 有限体積3次元双曲多様体の内部において，全測地的双曲面がどのように分布するかを研究した. このことは3次元ド・ジッター空間にクライン群がどのように作用するかを研究することに等しい. Moore のエルゴード性定理により，この作用はエルゴード的であることが知られているが，ここではより精密な観察を試みた. すなわち，3次元多様体の普遍被覆である双曲空間を基本領域で分割したときに，全測地的面の持ち上げが基本領域を横切るパターンを考察した. 次に挙げる2つの図は私が Mathematica を用いて描画したもので，それぞれ8の字群とあるコクセター群に関するパターンを双曲平面のポアンカレ円盤モデルに実現したものである. この研究は，ユークリッド平面におけるペンローズ・タイルの双曲平面版を考察することにも対応する. 実際，ペンローズ・タイルは5次元トーラスに全測地的ユークリッド平面を埋め込んだときに現れるパターンとして得られる. このことから双曲多様体の場合も，より高次元の場合に同様の考察をすることも必要である. また，上記の研究はクライン群のケイリー・グラフの全測地的部分グラ

フを考察することにも対応する. まだ問題意識を探っている状況であり，次年度以降も継続して研究する予定である.



(4) 以下の研究集会，勉強会を開催した.
 (a) 「リーマン面・不連続群論」研究集会，2012年1月，2013年1月，2013年11月，2015年2月（志賀啓成氏（東工大），宮地秀樹氏（大阪大学）と共同主催）
 (b) Workshop「クライン群とコンピュータ・グラフィックス」，2012年3月，名古屋大学.
 (c) Analysis and Geometry of Riemann Surfaces and Related Topics, 2013年6月，東工大（藤川英華氏（千葉大），小櫃邦夫氏（鹿児島大），田辺正晴氏（東工大）と共同主催）
 (d) 「Thurston 勉強会」，2014年3月・8月，東工大.

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

糸 健太郎 Convergence and divergence of Kleinian punctured torus groups, American

Journal of Mathematics 134 (2012) 861- 889.
(査読有)

糸 健太郎 Linear slices close to a Maskit slice, Geometriae Dedicata 171 (2014) 303-327. (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

糸 健太郎 Linear slices close to a Maskit slice, Pure Maths Colloquium, 2011年8月1日, Durham University, UK.

糸 健太郎 Linear slices that are not locally connected, リーマン面・不連続群論」研究集会, 2012年1月7日, 名古屋大学.

糸 健太郎 2点穴あきトーラスのマスクット・スライスのあるスライス族について, Workshop 「クライン群とコンピュータ・グラフィックス」, 名古屋大学

糸 健太郎 A family of slices of the Maskit slice for the twice punctured torus, Rigidity School, Tokyo 2011/ 2012, 2012年3月19日, 東京大学.

糸 健太郎 On the topology of the space of Kleinian once-punctured torus groups, Aspects of representation theory in low-dimensional topology and 3-dimensional invariants (CNRS/JSPS jointseminar) 2012年11月07日, Marseilles, France.

糸 健太郎 Linear slices close to a Maskit slice, AMS Spring Central Sectional Meeting, Special Session on Analysis, Dynamics and Geometry In and Around Teichmuller Spaces, 2013年04月27日, Iowa State University, USA.

糸 健太郎 Convergence and divergence of Kleinian punctured torus groups, Complex Analysis and Dynamics Seminar, CUNY, USA.

糸 健太郎 An attempt to obtain hyperbolic Penrose tilings, 研究集会 「トポロジーとコンピュータ2014」, 2014年11月15日, 東京大学.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

糸 健太郎 (KENTARO ITO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号 : 00324400