

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 28 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540084

研究課題名(和文) 高次圏論と一元体論の安定ホモトピー論への応用

研究課題名(英文) Applications to the higher category theory and the field with one element to the stable homotopy theory

研究代表者

南 範彦 (Minami, Norihiko)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80166090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：F_1-スキームの基礎的初等整数研究で、F_1(一元体)-的な見方が前面に出した論文が、Journal of Number Theoryに掲載された。

A_1-ホモトピー論に関して基本的だが難解なMorel-Voevodskyの論文の理解が進み、そのサーベイ論文がRIMS Kokyuroku u Bessatsuに掲載された。

自由ループ空間の研究からBockstedt-Hsiang-MadsenのNovikov予想代数的K類似と、トポロジカル絶縁体のdisorderの
有る場合に興味を持ったが、これら共通の先に非可換幾何のBaum-Connes予想が有ることを認識した。

研究成果の概要(英文)：An article of elementary number theory, which emphasized view points of the F_1-schemes (or the field with one element), was published in the journal of Number Theory.

As I picked up my level of understanding of the Morel-Voevodsky paper of the A homotopy theory, I published its survey paper in the RIMS Kokyuroku Bessatsu. While I got interested in apparent completely unrelated subjects of the Bockstedt-Hsiang-Madsen algebraic K analogue of the Novikov conjecture and the topological insulators with disorder, I realized the Baum-Connes conjecture of the noncommutative geometry is a common place to be explored for both of these researches.

研究分野：Homotopy Theory

キーワード：高次圏 ホモトピー論 一元体 代数的K理論 トポロジカル絶縁体

1. 研究開始当初の背景

球面の安定ホモトピー群に現れる $\text{Im } J$ の位数が本質的に数論で重要なベルヌーイ数の分母であるという Adams の定理には長年不思議に思っていた。そんな折に、数論最大の問題と言われる Riemann 予想に対して、1 元体を通したアプローチが、Connes 氏や黒川氏らによって提唱されていることを知ったのであるが、この 1 元体の観点からは、1 元体(F_1)の代数的 K 理論が球面の安定ホモトピー群に他ならないことを知り、大変驚いた。

2. 研究の目的

数論の歴史は古く、その最大の難問とも謳われる Riemann 予想の解決に向けては、極めて深い研究が数多く蓄積されている。それらを、有望なアプローチとして浮かび上がって来た F_1 (一元体)スキームの観点を通して、球面の安定ホモトピー群を中心とした安定ホモトピー論、更にそれをより数論幾何的に深化させた、Morel-Voevodsky の A^1 -安定ホモトピー論への、応用を目指す。

3. 研究の方法

書籍の購入や研究集会での講演聴講を通して情報収集して、数論、数論幾何、高次圏論への、理解を深める。そして理解をより深く整理するために、自ら率先してそれら最先端研究のサーベイ講演を多くの研究集会で行っていく。特に必要な場合、自ら研究集会を組織開催する。

4. 研究成果

当初夢見た程には進まなかったが、それでも以下のような進展があった：

ArXivにアップしていた F_1 -スキームの基礎的研究の初等整数論の論文を、Journal of Number Theory に投稿していたが、レフリーの数回にわたる改定要求を経て、monoid的な (F_1 -的な) 見方が前面に出るように大幅に書き換えることが出来、Journal of Number Theory, Volume 133, Issue 8, August 2013, Pages 2635-2647に掲載された。

A_1 -ホモトピー論に関しては基本的だが難解な、Morel-Voevodsky が200年に発表したIHES論文のサーベイ論文を、20ページのページ制限の下、RIMS Kokyuroku Bessatsu に投稿していた。しかしながら、Morel-Voevodsky の簡潔な説明をそのまま引用した K-theory

representability のある主張に対して、レフリーからは、信じ難いので正しければ詳細な証明を与えよとの要求があった。この真摯な要求に従うため、このサーベイ論文を現代的な観点から45ページの、Morel-Voevodsky IHES論文をの初学者にとっては大変役に立つと思われるものに書き直して、最終的にRIMS Kokyuroku Bessatsu B39巻 063-107頁, 2013に掲載された。この過程で、“delooped +=S 定理”等の、新しい知見を見出すことも出来た。

南が唱道する Newe Doomsday Conjecture に関しては、そのモチビックホモトピー(A_1 -ホモトピー) 論版も定式化することが出来ることに以前から気づいていた。ところが、通常の古典的ホモトピー論における New Doomsday Conjecture が正しければ、かなり一般の場合に、この Newe Doomsday Conjecture に関しては、そのモチビックホモトピー(A_1 -ホモトピー) 論版も正しいことがわかった。その粗筋は、京都大学数理解析研究所講究録, 1876巻 48-69頁, 2014に掲載された。

朝倉数学辞典執筆のための自由ループ空間の研究を通して、Bockstedt-Hsiang-MadsenのNovikov予想代数的K類似に興味を持ち、これに関するサーベイ講演も何回かした。また、以前古田幹雄氏らと一緒にしたQuaternionicベクトル束に対するFKMM不変量というものが、トポロジカル絶縁体におけるFu-Kane-Mele不変量を導くという、五味氏らの指摘を受けて、トポロジカル絶縁体にも興味を持つようになり、サーベイ講演も行った。特にトポロジカル絶縁体がdisorderを持つ場合にはConnes流の非可換幾何で考えなければならないという、Bellissardらの仕事を知り、非可換幾何の本質的重要性を認識した。これら2つの研究は、当初全く無関係であると思っていたが、Marcolli-Mathaiの仕事により、実はこれら共通の先に非可換幾何のBaum-Connes予想が有ることを認識した。

Connes氏らによる一元体を用いたRiemann予想へのアプローチが非可換幾何を通したもので有ることを考慮すると、Baum-Connes予想の

重要性の認識も、本研究の成果と理解出来る。ただ、Riemann予想そのものへの私の理解は弱いので、Riemann予想への第1歩となる素数定理に関して、そのNewmanとZagierによる簡略証明を理解し、高知ホモトピー論集会以て5時間連続で講演した。

なお、(アカデミック)社会的貢献としての成果としては、以下の2つの研究集会を開催した：

Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps, 岡山大学・自然科学研究科, 2014年3月24-26日

Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps 2, 岡山理科大学, 2015年3月27日

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① 南 範彦, モチビックホモトピー論における新・世界最後の日予想について, 京都大学数理解析研究所講究録, 数理解析研究所講究録 1876, 48-69, 2014年01月
<http://hdl.handle.net/2433/195572>
- ② Norihiko Minami, On the random variable $\#\{1, 2, \dots, n\}^r \cap \prod_{i=1}^r (k_1, k_2, \dots, k_r) \mapsto \text{gcd}(n, k_1 k_2 \dots k_r) \in \mathbb{N}$, *Journal of Number Theory*, **Volume 133, Issue 8**, August 2013, Pages 2635-2647
[DOI:10.1016/j.jnt.2013.01.012](https://doi.org/10.1016/j.jnt.2013.01.012)
- ③ Norihiko Minami, A topologist's

introduction to the motivic homotopy theory for transformation group theorists - 1, *RIMS Kokyuro Bessatsu*, 2013年03月

- ④ Norihiko Minami, A topologist's introduction to the motivic homotopy theory for transformation group theorists - 2, 京都大学数理解析研究所講究録, 1816, 13-35, 2012年12月
<http://hdl.handle.net/2433/194591>

[学会発表] (計39件)

- ① 2015年03月27日 モチビックホモトピー論の観点からみたL群, *Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps 2*, 岡山理科大学, 南 範彦
- ② 2015年03月27日 Boksted-Hsiang-Madsen のNovikov 予想の代数的K理論類似, *Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps 2*, 岡山理科大学, 南 範彦
- ③ 2015年03月27日 Baum-Connes 予想と分数量子ホール効果, *Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps 2*, 岡山理科大学, 南 範彦
- ④ 2015年03月09日～2015年03月11日 トポロジカル絶縁体周辺の入門的概観, 非可換幾何若手勉強会2015, 名古屋大学, 南 範彦
- ⑤ 2014年12月26日～2014年12月27日 Newman-Zagier の素数定理証明の簡潔証明(その4), 高知ホモトピー論談話会2014, 南 範彦

- ⑥ 2014年12月26日～2014年12月27日
Topological cyclic homology, 高知ホモトピー論談話会2014, 南 範彦
- ⑦ 2014年12月26日～2014年12月27日
Newman-Zagier の素数定理証明の簡潔証明 (その3), 高知ホモトピー論談話会2014, 南 範彦
- ⑧ 2014年12月26日～2014年12月27日
Newman-Zagier の素数定理証明の簡潔証明 (その2), 高知ホモトピー論談話会2014, 南 範彦
- ⑨ 2014年12月26日～2014年12月27日
Newman-Zagier の素数定理証明の簡潔証明 (その1), 高知ホモトピー論談話会2014, 南 範彦
- ⑩ 2014年11月13日～2014年11月15日 On the Beilinson-Rozenblyum Isogeny theorem of innite loop spaces, 変換群論シンポジウム, 蒲郡, Norihiko Minami
- ⑪ 2014年11月01日～2014年11月03日
Beilinson-Roenblyum の無限ループ空間 Hurewicz 関手isogeny 定理について, ホモトピー論シンポジウム, 大阪府立大学, 南 範彦
- ⑫ 2014年09月25日～2014年09月28日
Beilinson-Roenblyum の無限ループ空間 Hurewicz 関手isogeny 定理について, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学, 南 範彦
- ⑬ 2014年08月10日～2014年08月14日
pro-object II, 八ヶ岳ワークショップ, 2014, 南 範彦
- ⑭ 2014年06月29日 K理論「めがね」を通して服部先生の眼に映った代数トポロジー - Hattori-Stong を切り口として - 現代的観点から, ", 服部先生研究集会, 東京大学数理学部科学研究科, 南 範彦
- ⑮ 2014年03月24日～2014年03月26日 ループ空間に織りなす数学 - Witten種数と楕円コホモロジーを例に -, Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps, 岡山大学, 南 範彦
- ⑯ 2014年03月24日～2014年03月26日 ループ空間に織りなす数学 - Bokstedt-Hsiang-Madsen の定理を例に -, Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps, 岡山大学, 南 範彦
- ⑰ 2013年12月25日～2013年12月27日
Bokstedt-Hsiang-Madsen の Novikov予想の代数的K理論類似に関する仕事について, Seminaire de Topologie Algebrique, Printemps, 岡山大学, 南 範彦
- ⑱ 2013年11月02日～2013年11月04日 On the motivic analogue of the new doomsday conjecture - In serach of finiteness phenomena in the stable homotopy theory", ホモトピー論シンポジウム, 岡山大学創立50周年記念館, Norihiko Minami
- ⑲ 2013年09月17日～2013年09月19日
Angeltveit-Blumberg-Gerhardt-Hill-Lawson の Norm を用いたTCの見通しのよい構成に関して. 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 京都大学数理解析研究所, 南 範彦
- ⑳ 2013年05月27日～2013年05月30日 モチビックホモトピー論における新・世界最後の

日予想について, 変換群のトポロジーとその
周辺, 京都大学数理解析研究所, 南 範彦

㉑ 2013年03月21日 私の工学数学教育への
こだわり, 第16回工学系数学基礎教育研究会,
京都大学, 南 範彦

㉒ 2012年12月26日～2012年12月28日 ルー
プ空間に関して, 高知ホモトピー論談話会
2012, 高知大学理学部, 南 範彦

㉓ 2012年11月23日～2012年11月25日 An
introduction to the Topological Modular
Forms, The 39th Symposium on
Transformation Groups, Morito Memorial
Hall in Tokyo University of Science,
Norihiko Minami

㉔ 2012年11月12日～2012年11月16日 Long
and winding road to topological modular
forms, Geometrical perspective of
topological modular forms, Graduate School
of Mathematical Sciences, The University
of Tokyo, Norihiko Minami

㉕ 2012年11月02日～2012年11月04日 A
delooped “+ = S” theorem in algebraic
K-theory, Homotopy Symposium
2012, 山口大学, 南 範彦

㉖ 2012年09月10日～2012年09月12日 tmf
の古典的構成再訪, 空間の代数的・幾何的モ
デルとその周辺, 京都大学数理解析研
究所, 南 範彦

㉗ 2012年05月28日～2012年06月01日 トポ
ロジストによる変換群論研究者へのモチビッ
ク・ホモトピー論入門—2, 京都大学数理解析
研究所, 南 範彦

㉘ 2011年12月05日～2011年12月09日 The
New Doomsday Conjecture and the motivic
homotopy theory In serach of finiteness
phenomena in the stable homotopy theory,
East Asian Conference on Algebraic
Topology 4, University of Tokyo, Norihiko
Minami

㉙ 2011年11月18日～2011年11月20日 A
topologist’s introduction to the motivic
homotopy theory for transformation group
theorists, Transformation Group Theory
Symposium, Kobe, Norihiko Minami

㉚ 2011年09月07日～2011年09月09日
tower についてI, 空間の代数的・幾何的モデ
ルとその周辺, 京都大学数理解析研究所,
南 範彦

㉛ 2011年09月07日～2011年09月09日
tower についてII, 空間の代数的・幾何的モ
デルとその周辺, 京都大学数理解析研究所,
南 範彦

㉜ 2011年07月13日 モデル圏 - Michael
Alton Warren, Homotopy Theoretic Aspects
of Constructive Type Theory を読む準備と
して-, -多元学生プロジェクト-, 名古屋大
学多元数理研究科, 南 範彦

㉝ 2011年06月13日～2011年06月17日 The
nonabelian Hodge theory of
Katzarkov-Pantev-Toen, RIMS 研究集会 変
換群の幾何と組合せ論, 京都大学数理解析研
究所, 南 範彦

㉞ 2011年06月03日 入門: 高次圏と導来
代数幾何, 名古屋大学多元数理研究科, 南
範彦

㉔ 2011年05月13日 入門： 高次圏と導来代数幾何，名古屋大学多元数理研究科，南 範彦

㉕ 2011年04月22日 入門： 高次圏と導来代数幾何，名古屋大学多元数理研究科，南 範彦

㉖ 2011年04月11日～2011年04月15日 Katzarkov-Pantev-Toen の非アーベルホッジ理論 - 1，導来代数幾何勉強会- SGAD2011，京都大学数理解析研究所，南 範彦

㉗ 2011年04月11日～2011年04月15日 Katzarkov-Pantev-Toen の非アーベルホッジ理論 - 2，導来代数幾何勉強会- SGAD2011，京都大学数理解析研究所，南 範彦

㉘ 2011年04月08日 入門： 高次圏と導来代数幾何，名古屋大学多元数理研究科，南 範彦

〔図書〕（計 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

南 範彦 (MINAMI, Norihiko)
名古屋工業大学・工学研究科・教授
研究者番号： 80166090

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：