

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540085

研究課題名(和文) 離散群の変形空間と増大関数

研究課題名(英文) Deformation spaces of discrete groups and growth functions

研究代表者

藤井 道彦 (FUJII, MICHIIHIKO)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60254231

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円、(間接経費) 1,080,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者・藤井は、二面体群型のピュア・アルティン群 P というピュア・ブレイド群を一般化した離散群に関して、いくつかの研究成果を得た。まず、ピュア・アルティン群 P に付随するモノイド P_+ が P の中に自然に埋め込まれることを示した。次に、 P に対して、 P の元の代表元が測地的であるための必要十分条件を書き下した。さらに、 P の測地的元を受け付けるオートマトンを作成して、 P の増大級数 S の有理関数表示 G/F を求めることに成功した。分母の多項式 F を解析して、群 P の増大率 (S の収束半径の逆数) がある種の数論的性質を満たすこと(ピソ数であること)も示した。

研究成果の概要(英文)：The head investigator Fujii obtained several results concerning pure Artin groups P of dihedral type. First, Fujii showed that the associated monoid is naturally embedded in P . Next, Fujii described a necessary and sufficient condition such that representatives of an element g of P are shortest among all representatives of g . Third, Fujii constructed a finite state automaton which accepts all the geodesic representatives of P , and obtained a rational function expression of the growth series for P . Moreover, Fujii showed that the growth rate of P is a Pisot number.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学 トポロジー 双曲幾何 離散群 アルティン群 増大関数

1. 研究開始当初の背景

多様体 M に対して、その基本群からリー群 $PSL(2, \mathbb{C})$ への表現のなす空間 X は Thurston を始めとして、様々な研究者によっていろいろな角度から研究されていた。特に、3次元多様体を8つの幾何の観点から具体的に理解するためには、双曲構造の変形空間の構造を解明することが重要であると専門家の間ではよく知られていた。また、この設定を一般化して、離散群 Γ に対して、その幾何を適切に反映させるリー群 G を選んで、 Γ から G への表現のなす空間 X の研究も盛んであった。

- (1) 双曲錐構造の変形空間 X に関しては、Hodgson-Kerckhoff によって、函数解析の手法を用いて、局所的な情報がかかなり詳細に得られていた。また、小島定吉氏によって、錐角が 180 度以下の場合に大域的な情報(双曲錐構造の剛性など)が得られていた。研究代表者・藤井は、Hodgson-Kerckhoff による解析をさらに展開させて、局所変形の解析に必要な調和ベクトル場の具体的表示を得ていた。この表示を基に、より詳細に局所変形を解析することによって、小島の条件(180 度以下)を緩めることができるかどうかを研究することが重要だと思われていた。
- (2) 3次元球面内の双曲結び目の変形空間に関しては、それを代数多様体として捉えることによって、数論とトポロジーの間の類似物を発見しようとする試みが森下昌紀氏などによって行われていた。藤井は、8の字結び目の場合に、変形空間が楕円曲線になることに注目して、変形空間上の有理点と双曲構造が退化して他の幾何構造になる点との対応を発見していた。一般の双曲結び目の場合には種数が2以上になるが、その場合でも変形空間の有理点と幾何構造との対応があるかどうかを研究する必要性があった。
- (3) 双曲群に限らない、より一般の離散群の変形空間に関しては、連携研究者・齋藤恭司氏によって、有限部分グラフからなるホップ代数を用いて、その変形空間上の保形関数の構成の試みが行われていた。まずは保形関数のひな形の増大関数の情報を集める必要性があった。しかしながら、具体的に離散群の増大関数の計算自体もあまり行われていない状況であった。そこで、藤井は、研究分担者・佐藤隆夫氏とともに、ブレイド群を

はじめとする有限型アルティン群の場合に、その元が測地的になるための必要条件に関する研究を行い、その増大級数の計算を行っていた。

2. 研究の目的

幾何学的に重要な離散群 Γ に対して、 Γ の幾何を適切に反映させるリー群 G を選び、 Γ の変形空間 $X = \text{Hom}(\Gamma, G)$ を考える。本研究では、次の2つの場合に的を絞って、 Γ の変形空間 X の構造を解明することを目的とした。

- (1) G が双曲群の場合。
- (2) G がアルティン群の場合。

特に、(1)では微分トポロジー的側面からの解明、(2)では幾何学的群論の側面からの解明を目的とした。

3. 研究の方法

- (1) 藤井は、研究分担者・上正明氏および連携研究者・河澄響矢氏とともに、双曲構造の変形理論の中では特殊であるが重要な双曲錐多様体の変形に関して、微分トポロジーおよび双曲幾何の手法を用いて、研究を行った。具体的には、局所変形を与える調和1形式を微分形式のコホモロジーを用いて解析した。この解析をもとにして大域的な変形のための障害に関する問題に取り組んだ。
- (2) 藤井は、双曲結び目の場合に限定して、その上の双曲構造の変形空間 X を代数多様体としてみて、数論とトポロジーの間に成り立つ類似に着目して、 X の構造の解明を行った。一般に変形空間 X は種数2以上となるので、そのヤコビ多様体の構成を行った。5.2 結び目の場合に X 上の有理点に関する問題に取り組んだ。
- (3) 藤井は研究分担者・佐藤とともに、各年度3回くらいの割合でセミナーを開催し、離散群の変形空間の構造の解明を行った。まずは、幾何学的に重要な離散群の増大関数の計算を具体的な群に関して行った。
- (4) 藤井と佐藤は、特にアルティン群に関する場合に、その測地的オートマティック構造の構成に取り組み、構成に必要なコンピューターによるプログラムを開発した。さらに、数式処理システム Mathematica を用いて、増大関数の有理関数表示における分母の多項式の組み合わせ論的観点からの解析を行った。
- (5) 佐藤は、自由群の自己同型群の作用で不変なイデアルの降下列を与えて、

その冪零商に自明に作用する正規部分群を考えることによって、自由群の自己同型群上にフィルトレーションを定義して、アンドレアダキス・ジョンソン・フィルトレーションとのずれを考察した。また、自由群の自己同型群に上三角自己同型群という概念を導入して、アンドレアダキス予想の解明を行った。

4. 研究成果

- (1) 研究代表者・藤井は研究分担者・佐藤隆夫氏とともに、二面体群型のピュア・アルティン群 P について、詳細に研究した。具体的に得られた研究成果は次のものである。
- 1 群 P に対するポジティブ・モノイド P_+ が P に自然に単射で埋め込めることを示した。証明でポイントとなるのは、ブレイド群に対して、ガーサイドがポジティブ・モノイドの元のキャンセラティビティを示したのと同様の議論が二面体群型のピュア・アルティン群 P についても行える点である。
 - 2 1の方法とはまったく異なる、群論的な証明も与えることが出来た。
 - 3 ポジティブ・モノイド P_+ に関して、増大関数の係数の満たすべき漸化式を求めて、それを用いて P_+ の増大関数を求めた。
 - 4 3で求めることの出来たポジティブ・モノイド P_+ の増大関数の有理関数表示について、数論の観点からの考察を行った。具体的には、増大関数の有理関数表示における分母の多項式の零点の分布を数式処理システム Mathematica を用いて調べた。そこで、1が零点であり、さらに0と1で挟まれる開区間の中に一つだけ零点が存在することが分かった。また、その他の零点はすべて、複素平面での単位円盤の外部に存在することも分かった。
 - 5 2010年度の研究でポジティブ・モノイド P_+ の元を受理するオートマトンを作成できていたが、その手法を詳しく考察することによって、群 P 自体の測地的代表元を受理するオートマトンの構成に成功した。
 - 6 5で得られたオートマトンを用いて、群 P の測地的増大級数 S の計算に成功し、さらに増大級数 S の有理関数表示 G/F を得ることに成功した。
 - 7 6で得られた増大級数 S の有理関数表示 G/F の分母の多項式 F を解析して、さらに4の結果を用いて、二面体群型のピュア・アルティ

ン群 P の増大率 (S の収束半径の逆数)がある数論的性質(G がピソ数であるという性質)を持つことを示した。ケラーハルス教授(スイス・フリブール大学)がある種のコグゼター群の増大率がペロン数(ピソ数ならペロン数である)であろうと予想している。この研究成果は、より広範囲の群についてもその予想が成り立つことを示唆する重要な例となった。

8 今後の展望としては、二面体群型の場合のみならず、一般型のピュア・アルティン群の場合に、測地的代表元の特徴づけを行っていきたいと思う。

- (2) 研究分担者・佐藤氏は、自由群 G の自己同型群に関するアンドレアダキス予想に関して、次のような研究成果を得た。

1 自由群 G の IA-自己同型群の降中心列とアンドレアダキス・ジョンソン・フィルトレーションが、次数3の部分群まで一致することを示した。

2 自由群 G の自己同型群上に降下するフィルトレーションを定義して、このフィルトレーションがアンドレアダキス・ジョンソン・フィルトレーションとどの程度ずれているかについての結果を得た。

3 自由群 G の上三角自己同型群と IA-自己同型群の共通部分に関しては、アンドレアダキス予想が成り立つことを証明した。

4 今後の展望としては、アンドレアダキス予想を肯定的に証明したいと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1 M. Fujii, The growth rates for pure Artin groups of dihedral type, European Journal of Combinatorics 40 (2014), 108–115. (査読有)

DOI: 10.1016/j.ejc.2014.02.002

2 M. Fujii, The growth series for pure Artin groups of dihedral type, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 49 (2013), 497–530. (査読有)

DOI: 10.4171/PRIMS/111

3 M. Fujii and Takao Satoh, A necessary condition for representatives of elements of Artin groups of dihedral type, Hiroshima Mathematical Journal 43 (2013), 139–147. (査読有)

<http://projecteuclid.org/euclid.hmj>

4 Takao Satoh, First cohomologies and the Johnson homomorphisms of the automorphism group of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra, 217 (2013), 137--152. (査読有)

DOI:10.1016/j.jpaa.2012.06.017

5 Takao Satoh, On the augmentation quotients of the IA-automorphism group of a free group, Algebraic and Geometric Topology, 12 (2012), 1239--1263. (査読有)

DOI:10.2140/agt.2012.12.1239

6 Takao Satoh, On the lower central series of the IA-automorphism groups of a free group, Journal of Pure and Applied Algebra 216 (2012), 709-717. (査読有)

DOI:10.1016/j.jpaa.2011.08.006

7 Takao Satoh, The kernel of the Magnus representation of the automorphism group of a free group is not finitely generated, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society, 151 (2011), 407--419. (査読有)

DOI:10.1017/S0305004111000338

8 Naoya Enomoto and Takao Satoh, On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps, Algebraic and Geometric Topology 11 (2011), 2861-2901. (査読有)

DOI:10.2140/agt.2011.11.2861

[学会発表](計15件)

1 藤井 道彦, On geodesic representatives of braid groups, Ober seminar, 2014年3月19日、University of Fribourg, Switzerland

2 藤井 道彦, A sufficient condition for representatives of elements of braid groups to be geodesic, Workshop "Growth 2", 2014年2月4日、大阪市立大学大学院理学研究科

3 藤井 道彦, The growth rates for pure Artin groups of dihedral type, 研究集会「離散群と双曲空間のトポロジーと複素解析」, 2014年1月23日、京都大学数理解析研究所

4 斎藤 恭司, Monoid of integral square matrices and Euler product of its skew-growth function, 研究集会「離散群と双曲空間のトポロジーと複素解析」, 2014年1月20日、京都大学数理解析研究所

5 藤井 道彦, On geodesic representatives of elements of braid groups, 研究集会「低次元多様体の基本群とその表現に関連する様々な構造について」, 2013年10月31日、国際奈良学セミナーハウス

6 藤井 道彦, The growth rates for pure Artin groups of dihedral type, 鹿児島大学理学部談話会, 2013年10月23日、鹿児島大学理学部

7 藤井 道彦, The growth series of pure Artin groups of dihedral type, トポロジー-火曜セミナー, 2012年10月9日、東京大学大学院数理学研究科

8 藤井 道彦, The growth series of pure Artin groups of dihedral type, International Conference "Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis", 2012年7月29日、Kunming, China

9 佐藤 隆夫, On the Johnson cokernels of the mapping class group of a surface, International Conference "Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis", 2012年7月26日、Kunming, China

10 河澄 響矢, Mapping class groups and Goldman-Turaev Lie bialgebra, International Conference "Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis", 2012年7月26日、Kunming, China

11 藤井 道彦, The growth functions of pure Artin groups of dihedral type, Workshop "Branched Covering, Degenerations, and Related Topics", 2012年3月8日、広島大学大学院理学研究科

12 藤井 道彦, On the growth functions of Artin groups of finite type, Workshop "Growth", 2012年2月21日、大阪市立大学大学院理学研究科

13 藤井 道彦, The growth functions of pure Artin groups of dihedral type, 研究集会「離散群と双曲空間の解析と幾何」, 2011年12月15日、京都大学数理解析研究所

14 河澄 響矢, A geometric approach to the higher Johnson homomorphisms, 研究集会「離散群と双曲空間の解析と幾何」, 2011年12月13日、京都大学数理解析研究所

15 藤井 道彦, ブレイド群の測地的元と増大関数, 幾何セミナー, 2011年11月12日、東北大学大学院理学研究科

[その他]

ホームページ等

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/ja/people/profile/mfujii>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤井 道彦 (FUJII, Michihiko)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 60254231

(2) 研究分担者

1 上 正明 (UE, Masaaki)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80134443

2 佐藤 隆夫 (SATO, Takao)
東京理科大学・理学部・講師

研究者番号： 7 0 5 3 3 2 5 6

(3)連携研究者

1 河澄 響矢 (KAWAZUMI, Nariya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号： 3 0 2 1 4 6 4 6

2 斎藤 恭司 (SAITO, Kyoji)

東京大学・数物連携宇宙研究機構・主任研究員

研究者番号： 2 0 0 1 2 4 4 5