様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２６　年　　６　月　１９　日現在

機関番号：　１４５０１
研究種目：　基盤研究(C)
研究期間：　2011～2013
課題番号：　２３５４００８６

研究課題名（和文）シェイプ理論によるフラクタル幾何学へのカテゴリ的アプローチに関する研究

研究課題名（英文）A shape theoretical approach to fractal geometry

研究代表者
宮田　任寿（Miyata, Takahisa）

神戸大学・人間発達環境学研究科・教授

研究者番号：３０２８０３９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円、（間接経費）　　510,000円

研究成果の概要（和文）：シェイプ理論は，局所的に複雑な空間を対象とするホモトピー論として知られている．フラクタルは，距離空間と呼ばれる「距離」の概念をもつ図形の一種で，とくに局所的に複雑な性質をもつものとして知られている．本研究では，シェイプ理論を使って，フラクタルさらには一般的な距離空間のもつ幾何学的な性質を明らかにすることを目標に，カテゴリ的な手法を含め，いくつかの視点から研究を行った．とくに，シェイプ理論における重要な手法である逆システム，あるいは位相空間論における normal sequence と呼ばれる概念は，距離の概念を統合的に扱うのに，有効なもであることを明らかにした．

研究成果の概要（英文）：Shape theory is known as a homotopy theory for topological spaces with locally bad behavior. Fractal, on the other hand, is one of the spaces carrying the notion of distance, and is known as a metric space with locally complicated structures. In this project, we apply the theory of shape, in particular, its categorical aspects, to find the properties of fractals, or even general metric spaces. In particular, we have shown that the notion of inverse system, which is one of the most important approaches to shape theory, and the notion of normal sequence, which is one of the most important notions in the theory of topological spaces, have strong connections to metric spaces.

研究分野：　位相幾何学

科研費の分科・細目：　数学・幾何学

キーワード：　shape theory　inverse system　metric space　normal sequence　asymptotic dimensiom　Assouad-Nagata dimension　フラクタル幾何学

1. 研究開始当初の背景

(1) 距離空間へのアプローチとしては，集合論的，解析学的な手法を用いた方法がよく知られているが，カテゴリ的で統合的なアプローチは知られていなかった.

(2) 幾何学的トポロジーや位相空間論と言われる分野においては，諸問題において有効な道具が開発されているが，これらの分野を超えた応用例は知られていなかった.

(3) シェイプ理論を構成する概念の 1 つである逆システムは，幾何学的トポロジーの分野において有効で，とくにカテゴリ的は手法に対する道具として有効であることが知られていた.

(4) 研究代表者は，渡辺正氏との共同研究で，この近似システムの概念について基礎的な研究をし，その重要性についていくつかの結果を得ていた.

(5) そこで，我々は幾何学的トポロジーや位相空間論において有効な概念が，距離空間の様々な性質を解明するのに有効であるのではないかと考えた.

２．研究の目的

本研究では，フラクタルを含む距離空間（場合のよってはコンパクト距離空間や可分距離空間）を対象として考える．本研究の具体的な目的は次のとおりである.

(1) シェイプカテゴリを構成する 1 つの概念である逆システムに関する理論を総合的な研究を行う.

(2) 位相空間論における距離付けに関する理論の総合的な研究を行う.

(3) 距離空間の幾何学的な性質をより統合的に理解するための基礎的な研究を行う.

(4) 以上の基礎研究の応用としてフラクラル幾何学への関連性について調べる.

３．研究の方法

研究代表者は，幾何学的トポロジー全般（とくにシェイプ理論，次元論に関するもの），位相空間論全般（とくに距離付けに関するもの），距離空間全般（とくに局所的・広域的幾何学に関するもの）について文献を調べ，問題の整理を行い，具体的な問題について検討を行った．セミナーを通して，とくに距離空間に関する専門家から情報提供を受け，問題の解法について検討を行った．得られた結果を学術論文にまとめ，学術雑誌に投稿した.

４．研究成果

以下に，本研究の具体的な研究成果について以下にまとめる.

(1) アーベル群からなる逆システムに対して Moore space を定義し，シェイプカテゴリにおいて，ホモロジー分解（E. H. Brown and A. H. Copeland, A homology analogue of Postnikov systems, Michigan Mathematical Journal Vol. 6 (1959), 313--330）が存在することを証明した.

(2) 一般的に，拡張問題とは，空間 X の閉集合 A の上で定義される，位相的によい性質を持つ空間 Y（例えば，CW complex）への連続写像 f の，X 全体への拡張可能性を決定することである (A. Dranishnikov, Extension of mappings into CW-complexes, Math. USSR Sbornik Vol. 74 (1993), 47-56)．拡張問題は，Y の選択により，covering dimension(位相次元)や cohomological dimension を特徴付け，さらには，extension theory と呼ばれる統合的な理論と深い関連がある (A. Dranishnikov and J. Dydak, Extension dimension and extension types, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics Vol. 212 (1996), 55-88)．我々は，シェイプ理論における逆システムを使い，Y を一般の空間とする場合の拡張問題を形式化し，基礎的な研究を行った．とくに，一般の空間に対する extension dimension（approximate extension dimension と呼ぶ）が存在することを証明した.

(3) 可分距離空間 X の covering dimension が n 以下であることは，covering dimension 0 の空間から X への(n+1)-to-1が写像が存在することと同値である（Hurewicz の定理，W. Hurewicz, Uber stetige Bilder von Punktmengen, Proc. Akad. Amsterdam Vol. 29 (1926), 1014-1017)．また，距離空間 (X,d) が Assouad-Nagata dimension 0 をもつことと，X 上の ultrametric e が存在して，恒等写像 (X,e) →(X,d)が bi-Lipschitz写像であることとは同値である (J. Dydak, J. Higes, A. Mitra, Dimension zero at all scales, Topology and its

Applications Vol. 154 (2007), 2729 - 2740). これらの結果をもとに, 我々は, 可分距離空間(X,d)が Assouad-Nagata dimension が n 以下であること (P. Assouad, Sur la distance de Nagata, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics Vol. 294 (1982),31-34) と, ultrametric space (Z, e)と(n+1)-to-1 Lipschitz 写像 f: (Z, e) → (X,d)が存在することが同値であること (Assouad-Nagata dimension に対する Hurewicz の定理) を証明した.

(4) 我々は, 大域幾何学において, finite-to-one 写像の概念を導入し, Hurewicz の定理 ((3) を参照) を, asymptotic dimension と Assouad-Nagata dimension に対して証明した.

(5) Alexandroff-Urysohn の距離化定理は, 位相空間論において有効な道具として知られている (P. Alexandroff and P. Urysohn,Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (B), Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique A-B Vol. 177 (1923), 1274 - 1276). この定理は, 位相空間論で知られている normal sequence の概念が距離を定義することを示している. 我々は, 距離空間論における large-scale, small-scale, all-scale の概念に対応する normal sequence を定義し, 距離空間の幾何学への統一的なアプローチの方法を開発した. とくに, 我々は, 以下の概念との関連を明らかにした：距離化問題, Lipschitz カテゴリ, Assouad-Nagata dimension, uniform カテゴリ, topological カテゴリ, uniform dimension, covering dimension, asymptotic dimension, asymptotic Assouad-Nagata dimension. 応用として, Assouad-Nagata dimension の, uniform dimension, covering dimension, asymptotic dimension との関係についても明らかにした.

(6) A. N. Dranishnikov は, コンパクト距離空間に対して, CW spectrum を coefficient とする generalized cohomological dimension を定義した (A.N. Dranishnikov, Generalized cohomological dimension of compact metric spaces, Tsukuba J. Math. Vol. 14 (1990), 247-262). 我々は, 逆システムを使って, 安定シェイプのオブジェクトを coefficient とする, 2 種類の generalized cohomological dimension を定義し, これらの基本的な性質を明らかにした. とくに, これらの generalized cohomological dimension と, 通常の cohomological dimension との関連, covering dimension との関連について調べ, 応用例として, Kahn continuum や Hawaiian earing を coefficient とする generalized cohomological dimension について明らかにした.

(7) 代数的トポロジーにおいて, すべての連続写像は, ホモトピー同型と fibration の合成写像で表されることが知られている. これをシェイプカテゴリにおいて証明しようとする場合, 非常に難問となるが, 一様シェイプカテゴリ (T. Miyata, Uniform shape theory, Glasnik Matematicki Vol.29 (1994), 123 - 168) においては同様な結果が成り立つことを示した. すなわち, すべての一様連続な写像は, 一様シェイプ同型と uniform shape fibration の合成写像で表されることを証明した.

５. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 7 件)

① T. Miyata, Factorization of uniformly continuous maps through uniform shape fibrations, accepted for publication in Glasnik Matematicki, 査読有.
http://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik/

② T. Miyata, A shape theoretic approach to generalized cohomological dimension, Glasnik Matematicki,査読有, Vol. 49 (2014), 195-220.
http://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik/vol_49/no1_14.html

③ T. Miyata, Normal sequences in all scales, Topology and its Applications,査読有, Vol. 164 (2014), 146-161.
http://dx.doi.org/doi:10.1016/j.topol.2013.12.015

④ T. Miyata and Z. Virk, Dimension-raising maps in a large scale, Fundamenta Mathematicae,査読有, Vol. 223 (2013), 83-98.
http://dx.doi.org/doi:10.4064/fm22

3-1-6

⑤ T. Miyata and T. Yoshimura, Assouad-Nagata dimension and finite-to-one Lipschitz maps, Topology Proceedings,査読有, Vol. 42 (2013), 43-48.
http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v42/

⑥ T. Miyata, Approximate extension property of mappings, Topology and its Applications,査読有, Vol. 159 (2012), 921-932.
http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2011.12.011

⑦ T. Miyata, Homology decompositions in shape theory, Publicationes Mathematicae Debrecen,査読有, Vol. 78 (2011), 15-35.
http://www.math.klte.hu/publi/contents.php

６．研究組織

(1) 研究代表者

宮田 任寿 (MIYATA, Takahisa)
神戸大学大学院・人間発達環境学研究科・教授
研究者番号: 30280390