

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540088

研究課題名(和文) 曲面群の指標多様体上の写像類群による作用の幾何学

研究課題名(英文) The geometry of the mapping class group action on the character variety of surface groups

研究代表者

山下 靖 (Yamashita, Yasushi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：70239987

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円、(間接経費) 480,000円

研究成果の概要(和文)：穴あきトーラスの $SL(2, \mathbb{C})$ 指標多様体において、BowditchによるQ条件、指標に対応する表現の離散性、写像類群の力学系の複雑さ、の3者の関連を中心研究を行った。特にリニアスライスと呼ばれる指標多様体の部分集合内において、離散領域の大域的な形状に関する小森洋平氏との共同研究を発表した。また、原始安定性というMinskyによって近年定義された力学系の複雑さをはかる概念について、計算機実験を行い、Q条件との比較を行った。

研究成果の概要(英文)：We studied the $SL(2, \mathbb{C})$ -character variety of once punctured torus. In particular, we investigate the relation between the Q-condition due to Bowditch, the discreteness of the corresponding representation, the complexity of the dynamics of the mapping class group action on the character variety. We published a joint paper with Yohei Komori on the global structure of the discreteness loci of the li near slices of the character variety. We carried out computer experiments on primitive stableness, which was introduced recently by Minsky and measures the complexity of the dynamics of the mapping class group action, and compared our results with Q-condition.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何 双曲幾何

1. 研究開始当初の背景

指標多様体 $X = \text{Hom}(\cdot, \text{SL}(2, \mathbb{C})) / \text{SL}(2, \mathbb{C})$ の要素 (指標) は, 対応する表現の像が $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の中で離散群となっている場合には曲面の双曲幾何構造を与えるため, X を離散指標からなる部分 D とそうでないものからなる部分 D' の2つに分解して考えることはこれまでよく行われてきた. タイヒミュラー空間は群が $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ のときの D の連結成分と同一視できることが Goldman により示され, 群が $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ のときは, D はクライン群の変形空間として非常に重要な研究対象であるとともに, 2000 年以降に大きな進展が見られた. この分解は「幾何学的分解」と呼ばれ, 特に曲面が穴あきトーラスの場合には Jorgensen による先駆的な研究がある.

一方, X をその中で写像類群の作用が固有不連続に作用する部分 P とそうでない部分 P' に分ける「力学系的分解」も考えられる. タイヒミュラー空間上には写像類群が固有不連続に作用することと, 像が離散的でない表現は力オス的であることを考えると, 素朴には幾何学的分解と力学系的分解は自然に一致するようにも思える. しかし驚くべきことに近年 Minsky-Lubotzky により定義された原始安定と呼ばれる X のクラスは P の部分集合でありながら D の要素も含むことが示され, 上の素朴な考えの反例を与えると共に近年注目が高まっている.

曲面が1つ穴あきトーラスの場合には指標多様体上の写像類群の作用に関しては Bowditch, Tan-Wang-Zhang らがフックス群の擬等角変形および McShane の等式との関連で Q 条件と呼ばれる条件を導入, 研究を行ってきている. McShane の等式は近年 Mirzakhani によるモジュライ空間の Weil-Petersson 体積の計算で本質的な役割を果たすなど, 発展が期待されている. しかし, Minsky が原始安定性を定義した論文でも未解決問題として挙げられているように, 原始安定性と Q 条件の関係はこれまでのところ不明で, これらの関連が興味をもたれている. また, 同じ論文で同じく問題として挙げられていることに, 与えられた X の要素が原始安定かどうかを判別するアルゴリズムを与えよというものがある. これが可能になると, 計算機実験により離散性・原始安定性・ Q 条件の比較を行うことが出来, 今後の研究において大きな進展が期待される.

本研究代表者は, 大阪市立大学の秋吉宏尚氏, 広島大学の作間誠氏, 大阪大学の和田昌昭氏らと上記 Jorgensen 理論の精密化の研究を近年行ってきた. 加えて早稲田大学の小森洋平氏, 東北大学の須川敏幸氏および上記の和田氏らと離散性判定アルゴリズムを利用した研究を行ってきた. また, シンガポール国立大学の Tan Ser Peow 氏と, Q 条件判定アルゴリズムを利用した研究を行っており, 特に, 計算機ソフトウェアとして実装し, 計算機実験をこれまで行ってきている.

2. 研究の目的

曲面の基本群のリー群 G への表現全体の G の共役による作用による幾何学的不変式論(GIT)の意味での商空間 $\text{Hom}(\cdot, G)/G$ は, 曲面群の指標多様体と呼ばれ, 自然に写像類群による作用を許容し, この空間と作用を幾何的および力学系的に理解することが最も基本的な研究目的である. 特に穴あき曲面で G が $\text{SL}(2; \mathbb{C})$ の場合, 指標多様体には, 写像類群作用の固有不連続性に関連して Bowditch, Tan-Wang-Zhang らによるものと Minsky-Lubotzky によるものの2種類の分解が考えられ, どちらもタイヒミュラー空間論およびクライン群論に深く関連するが, 両者の関係は未解決問題となっている. 本研究課題ではこれら2つの関係を解明することを研究目的とする.

3. 研究の方法

研究の目的で述べた2つの関係を計算機実験及び理論的なアプローチの2つを利用して行う. これは, 計算機実験をおこなうことで理論に関するヒントが得られることを期待しているためである.

はじめに, すでに部分的に着手している原始安定性判定アルゴリズムの開発と計算機上での実装を行う. 実装は, 現在のパーソナルコンピュータ上でのプログラミングで行う. さらに年度内に計算機実験により Q 条件との比較を行う. これは基本的には Whitehead のアルゴリズムとして知られているものを変形することにより行う. このアルゴリズムは Minsky 氏が原始安定の研究を行う際に利用したものである. これを本研究課題の判定アルゴリズムに組み込むことで, 効率の良いアルゴリズムを構成する.

それ以降に, 原始安定性と Q 条件の包含関係について研究を行う. はじめに Q 条件をみたすものがいつ原始安定になるか, 次に原始安定であるものがいつ Q 条件をみたすかを調べる. これには Lubotzky による redundant 条件を使用する方法と, 群の原始元に楕円のまたは放物的な元が含まれているのかどうかを探索する方法があり, 両者を検討することにより議論を行う.

実験結果および上記2つの性質の関係について検討するため, 国内外の関連研究者と議論を行う.

4. 研究成果

(1) 穴あきトーラスの指標多様体において, 対応する表現が離散群となるような指標からなる部分集合 (離散領域) の分布の様子を調べることは基本的な問題である. 指標多様体自体は複素2次元的なものであるが, 複素1次元となる部分集合を考え, その様子を詳細に調べる研究がこれまで多くなされてきた.

本研究代表者はシンガポール大学の Tan 氏と英国ウォーリック大学の Series 氏との共

同研究で、ダイアゴナルスライスと呼ばれる指標多様体の部分集合における離散領域と Q 条件を満たす領域の違いの様子を記述することに成功した。完備有限体積穴あきトーラスに対応する指標多様体の部分集合においては離散領域と Q 条件を満たす領域が等しくなることが予想されているが、今回の(完備有限体積ではない)ダイアゴナルスライスにおいてはそれらが大きく異なっていることを理論的に考察した。さらにこの違いは、有限指数部分群を用いても離散性は変化しないが Q 条件は変化することによって生じていること、さらにどのような有限指数部分群に関する Q 条件がこの場合の離散性と対応しているのかという点について考察を行った。その結果、離散性と特に対応している有限指数部分群は、これまで研究されてきていたライリースライスとよばれる部分集合について、穴の周りの条件を若干変えることによって得られるもので、いわば一般化されたライリースライスと呼ぶべきものであることが分かった。さらにこのスライスについてプリーツ不変量とよばれるものがもともとのライリースライスと同様に定義され、それらが群の離散性を制御するとともに、幾何学的な特徴をよくとらえていることを観察することができた。この結果は研究集会などで発表している。

(2) 本研究代表者はリニアスライスと呼ばれる指標多様体の部分集合における離散領域の連結成分の数に関する小森洋平氏との共同研究を、論文として発表した。

マスクットスライスと呼ばれるスライスにおいては離散領域の連結成分の数は本質的には1つであることが以前から知られていたが、リニアスライスを与えるためのパラメータを適切に変化させることにより、連結成分の数が常に2以上になるようなパラメータの集合を与えることに成功した。また、計算機実験によりそれぞれのスライスにおいて離散領域の形状がどのようなものであるかなどについて数値的な実験結果を示すことに成功した。

(3) 任意の閉3次元多様体は3次元球面の分岐被覆として得られることは古典的によく知られている。特に分岐点の集合として双曲絡み目をとることが可能である。これを利用して、閉3次元多様体の複雑さを測る指標とみなすことができる絡み目体積という不変量を、本研究代表者は米国アーカンソー大学のヨアブリエック氏との共同研究において定義した。より具体的には、閉3次元多様体が与えられたときに、それと同相な球面上の双曲絡み目で分岐する分岐被覆をすべて考え、それぞれの双曲絡み目の補空間の双曲体積と被服度との積の下限によって、絡み目体積を定義した。

ここで基本的な課題となるのは、よく研究

されている通常の大曲体積と我々の絡み目体積との関係を調べることである。共同研究の結果、大曲体積の場合に類似した4面体分割の必要最小数に関する構造定理を得ることができ、査読付き論文として発表した。また、大曲体積と絡み目体積の比がいくらかでも大きくなるような閉3次元多様体の列が構成可能であることをしめし、両者が本質的に異なる挙動を示すものであることを発見した。これらの結果は、学会などにおいても発表された。

(4) 無限離散群における重要な未解決問題に、階数2の自由アーベル群を部分群として含まない有限表示群(より正確には $K(G,1)$ の場合に限定すべきであることが知られている)は大曲群か、というものがある。一般にはこれについての反例があることが予想されるが、それとは別にどのくらい広い範囲の有限表示群が上記の条件を満たすかということ調べることも重要な問題である。

本研究代表者は、田村誠氏、中川義行氏との共同研究で、対象とする離散群の範囲をオートマティック群と呼ばれる範囲に限定して、上記の問題へのアプローチを行った。その結果、階数2の自由アーベル群そのものではないが、それに近い構造を多くの大曲的ではないオートマティック群が許容することを見出した。さらに、オートマティック群の中でも $CAT(0)$ 群と呼ばれる良い幾何構造を持つ群の場合は、適当な条件を加えることにより階数2の自由アーベル群そのものを実際に許容することを見出した。これらの結果は研究集会などで発表した。

(5) 研究当初の背景でも述べたように、原始安定性という概念は指標多様体の上に作用する写像類群の力学系的な複雑さを考察する上で重要な概念であるが、離散性や Q 条件との関係などは知られていないことが多いのが現状である。本研究代表者は、Minskyによる原始安定性をみだす部分集合が開集合であることを示すための議論をヒントにして原始安定性を示すためのアルゴリズムに関する実験を行った。その結果、有限体積完備穴あきトーラスの場合においては原始安定性と Q 条件は同値である可能性が高いという実験結果を得た。(ただしこの結果は数値実験によるもので理論的な証明ができていないわけではない。)これらの結果は研究集会などで発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Yo'av Rieck, Yasushi Yamashita. The link volume of 3-manifolds. *Algebr. Geom. Topol.*, 13(2):927-958, 2013. 査

読有

DOI: 10.2140/agt.2013.13.927

Yasushi Yamashita. Creating software for visualizing Kleinian groups, volume 23 of Lecture Note Ser., IMS, NUS, pages 159-190. World Scientific Pub. Co., Singapore, 2012. 査読有

DOI: 10.1142/9789814401364_0005

Yohei Komori and Yasushi Yamashita. Linear slices of the quasi-Fuchsian space of punctured tori. Conform. Geom. Dyn., 16:89-102, 2012. 査読有

DOI:10.1090/S1088-4173-2012-00237-8

Yasushi Yamashita. A very brief introduction to virtual haken conjecture. 数理解析研究所講究録, 1836:192-199, 2013. Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodokokyuroku/contents/pdf/1836-18.pdf>

Yasushi Yamashita. A computer experiment on primitive stable representations. 数理解析研究所講究録, 1807:87-93, 2012. Integrated Research on Complex Dynamics. 査読無

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodokokyuroku/contents/pdf/1807-11.pdf>

[学会発表](計14件)

Yasushi Yamashita, Non-hyperbolic automatic groups and groups acting on $CAT(0)$ cube complex, 2014.3.7, Branched coverings, degenerations, and related topics 2014, Hiroshima University

Yasushi Yamashita, The growth of torus link groups, 2014.2.3, Growth2, Osaka city university.

Yasushi Yamashita, Non-hyperbolic automatic groups and groups acting on $CAT(0)$ cube complex, 2014.1.21, Complex analysis and topology of discrete groups and hyperbolic spaces, RIMS Kyoto university

Yasushi Yamashita. The link volume of 3-manifolds, 2013.5.16. Geometry & Topology seminar, University of Warwick, UK.

Yasushi Yamashita. The diagonal slice of $SL(2,C)$ -character variety of free group of rank two, 2012.11.8. CNRS/JSPS joint seminar, Carry-le-Rouet, France.

山下靖, Creating software for visualizing kleinian groups, 2012.10.15-16. 集中セミナー, 広島大学.

Yasushi Yamashita. The diagonal slice of $SL(2,C)$ -character variety of free

group of rank two, 2012.9.12. Low-dimensional Geometry and Topology, Tokyo Institute of Technology
Yasushi Yamashita. $Out(F_n)$ actions on character variety, 2012.6.22. Kyoto Dynamical Systems seminar

Yasushi Yamashita. A brief introduction to virtually Haken conjecture, 2012.5.30. RIMS Seminar, Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds, Hakone.

Yasushi Yamashita. $Out(F_n)$ actions on $SL(2,C)$ -character variety, 2012.5.28. RIMS Seminar, Representation spaces, twisted topological invariants and geometric structures of 3-manifolds, Hakone.

山下靖. Bowditch による q -condition に関する計算機実験 1・2, 2012.3.5-6. クライン群とコンピュータ・グラフィックス, 名古屋大学.

Yasushi Yamashita. A computer experiment on primitive stable representations, 2012.1.27. RIMS 研究集会, Integrated Research on Complex Dynamics.

Yasushi Yamashita. Growth functions of two-bridge link groups and cocompact hyperbolic coxeter groups, 2012.1.6. 新春幾何群論セミナー, 神戸大学.

山下靖. 結び目群および双曲コクセター群の growth function について, 2011.12.1. Sendai Max Dehn seminar, 東北大学.

[その他]

ホームページ等

<http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~yamasita>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山下 靖 (YAMASHITA, Yasushi)

奈良女子大学・自然科学系 教授

研究者番号: 70239987