様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

科研費
KAKENHI

平成　２７　年　　６　月　　５　日現在

機関番号：　１５５０１
研究種目：　基盤研究(C)
研究期間：　2011～2014
課題番号：　２３５４００９１

研究課題名（和文）対称空間の曲面論に対するグラスマン幾何的研究

研究課題名（英文）Grassmann geomety of surfaces in a Riemannian symmetric space

研究代表者
内藤　博夫（Naitoh, Hiroo）

山口大学・理工学研究科・教授

研究者番号：１０１２７７７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン幾何学において，リーマン対称空間は最も重要な空間の１つであり，また，その部分多様体の研究において，等質部分多様体の分類は解決すべき重要な問題の１つである。この問題へのアプローチとして，本研究の目的は，一階偏微分方程式系の言葉で記述できるグラスマン幾何の枠組みを用いて，リーマン対称空間における様々な曲面論を考察し，その中から，グラスマン幾何的曲面論の理論を構築することである。研究成果とし，グラスマン幾何的曲面論の形式的分類を得，そのうち，実質的なものはある種のコホモロジー理論を用いて判定できるだろうとの推論を得たが，理論の確立までには至っていない。

研究成果の概要（英文）：In Riemannian geometry, a Riemannian symmetric space is one of the most important spaces and in the study of submanifolds in it, the classification problem of homogeneous submanifolds is also one of important open problems to solve. As an approach to this problem, the aim of this study is to consider many kinds of surfaces in a Riemannian symmetric space from the standpoint of Grassmann geometry, which may be described in terms of the system of 1st order partial differential equations, and to find out all the sustantial theories of Grassmann-geometric surfaces in a Riemannian symmetric space. As a research result, we have obtained the classification of all formal theories of Grassmann-geometric surfaces and an expectation that the substantial theories may be found out in terms of a certain kind of cohomology theory among the formal theories of Grassmann-geometric surfaces. But we can not establish a theory yet.

研究分野：　微分幾何

キーワード：　対称空間　曲面論　グラスマン幾何　リー理論

１．研究開始当初の背景

リーマン対称空間は，リーマン幾何学が対象とする多様体の中でも，その対称性及び等質性において幾何学的美しさを有するとともに，その研究においては，リー群・リー代数のリー理論やその表現論等の代数的手法が有効に働く研究領域である。それ故，リー理論の発展に伴って，２０世紀前半の E. Cartan によるリーマン対称空間の分類理論の確立以降，様々な幾何学的現象が対称空間上で研究されてきた。

一方，リーマン幾何学発祥の動機づけとなった Gauss の古典的曲面論は，極小曲面論など独自の曲面論として展開・発展してきたとともに，リーマン幾何学の中で，リーマン部分多様体として抽象化され，ユークリッド空間を始めとする定曲率空間や各種射影空間など典型的なリーマン対称空間において，その部分空間論として発展してきた。特に，リーマン対称空間の等質性を受け継ぐ「等質部分多様体」は，それぞれの部分空間論において，極めて重要な例を提供してきた。

また，グラスマン幾何は，１９８０年代に，Harvey と Lawson によって形式的に提唱された部分多様体の枠組みで，リー部分群や等質部分多様体の分類研究においては，接空間のリー代数的性質からそれらを大雑把に分類するという観点から極めて適合性がある理論である。また，リーマン対称空間の部分多様体論においても，前出の等質部分多様体をモデルとする部分多様体論の創出のほか，等質部分多様体を許容しない新たなグラスマン幾何的な部分多様体論の発見も想起させる枠組みである。グラスマン幾何の枠組みにおける部分多様体の局所幾何学的性質は，局所座標を経由することによって，ある種の一階偏微分方程式系の解の性質に他ならないことも分かっている。

このような背景の下で，本研究に関連する研究として，研究代表者は「対称部分多様体の分類理論」や「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」の研究を進めてきた。前者の研究は，リーマン対称空間における典型的な等質部分多様体である「対称部分多様体」の分類を完成したものであり，本研究の動機づけの１つになった研究である。「対称部分多様体」は，大雑把にいえば，像空間であるリーマン対称空間の対称性を受け継ぐ部分空間と言ってもよい。また，後者の研究は，一般にリーマン対称空間ではないが，様々な具体的検証が可能なリーマン等質空間である「３次元ユニモジュラーリー群」におけるグラスマン幾何的曲面族の分布状況を研究したもので，本研究においては，着想や研究方針を検証するための先行研究の１つと位置づけられる。

２．研究の目的

このような背景と準備状況の下, 本研究では,「グラスマン幾何の観点から，リーマン対称空間における曲面論が、対称空間の持つ等質性にどのように影響されるかを明らかにし，その結果として，定曲率空間等で展開されてきた従来の曲面論とリーマン対称空間の理論を融合させる」ことを研究の目的とした。研究目的では，リーマン対称空間の曲面論，すなわち，２次元リーマン部分多様体を対象としたが，最終的な研究目標は，リーマン対称空間の一般次元リーマン部分多様体のグラスマン幾何的な解明と対称空間論の融合にある。リーマン部分多様体論のグラスマン幾何的解明は，未解決であるリーマン対称空間の等質部分多様体の分類問題の解決に繋がり，この問題は，２０世紀前半に, Dynkin により解決されたコンパクトリー群の閉リー部分群の分類の延長線上にある。

本研究課題で，曲面論を最初の研究対象として取り上げた理由は，Riemann 以降近年に発達してきた一般次元のリーマン部分多様体論に比べ，曲面論には，Gauss 以来の豊富な知識の蓄積があり，様々な研究手法が整備さ

れているためである。

3．研究の方法
本研究目的を達成するために，研究計画を３つの段階に分けて，それぞれ，次に掲げる研究目標を設定した。

（第一段階）グラスマン幾何的曲面論の（形式的）分類
リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面とは，その接平面がリーマン対称空間の等長変換で移り合うような曲面のことをいう。すなわち，接平面レベルでは“等質性”を持っている曲面と言ってもよい。そのような曲面族を同じ等質性を持つものを１つのクラスとするようなクラス分けをする。それぞれのクラスをグラスマン幾何的曲面論という。第一段階の研究目標は，接平面の等質性に着目して，接平面レベルでグラスマン幾何的曲面論の候補を分類することである。分類は形式的に行われるので，この段階では，実際にグラスマン幾何的曲面が実在することを保証するものではない。先ず，研究対象となるターゲットを明確にすることが目的である。このターゲットを“形式的”グラスマン幾何的曲面論という。

（第二段階）実質的なグラスマン幾何的曲面論の決定
この段階では，第一段階で形式的に分類された，形式的グラスマン幾何的曲面論にグラスマン幾何的曲面が実際に存在するための判定条件を見つけることがテーマである。すなわち，形式的グラスマン幾何的曲面論の中から実質的なものを抽出する手法を確立することが研究目標になる。

（第三段階）グラスマン幾何的観点に照らした、対称空間における典型的曲面の存在状況の解明
この段階では，第二段階で抽出された，それぞれの実質的なグラスマン幾何的曲面論（以後，単に「グラスマン幾何的曲面論」とよぶ）が，曲面論としてどのような特徴を持っているのか，例えば，極小曲面など，これまでの曲面論の研究の中で“典型的な”あるいは“重要な”曲面として扱われてきたものが存在するのか，など曲面論の特徴を明らかにすることが研究目標である。
リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面論の例として，　ユークリッド空間を始めとする定曲率空間の中の２次元曲面族で構成される曲面論，複素射影空間の複素曲線族で構成される曲面論など階数１のリーマン対称空間のある種の曲面論などがよく知られ研究されてきた。また，先の先行研究「３次元ユニモジュラーリー群上のグラスマン幾何」は，像空間がリーマン対称空間ではないが，その空間のグラスマン幾何的曲面論を決定し，それぞれの曲面論の特徴を明らかにしたものである。これらの例を眺めると，リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面論は，曲面論によって，様々な特徴を持っていることが推測でき，したがって，この段階の研究では，リーマン対称空間に限らず，様々な空間の曲面論や部分多様体論に拡げ，その特徴を広く認識することが必要であると考えられる。

以上のような研究計画に基づいて，研究体制を，グラスマン幾何を研究してきた研究代表者のほか，極小曲面など曲面論の幾何学を専門領域とする研究分担者（中内，川上）及びトポロジーと微分幾何の中間領域を専門分野とする研究分担者（鍛冶，近藤）で構成した。研究の役割は，それぞれ，研究代表者が研究統括とグラスマン幾何的側面からの主研究を，また，第二段階の研究において，研究分担者（鍛冶，近藤）がトポロジー的な側面からの研究サポートを，また，第三段階の研究において，研究分担者（中内，川上）

が様々な曲面論の研究とその知見の提供という側面から研究サポートを担うこととした。

４．研究成果

本研究の研究成果あるいは研究状況を研究計画に示した３つの段階に従って記述する。

（１）第一段階の研究成果等

第一段階の研究目標は，リーマン対称空間の形式的グラスマン幾何的曲面論の分類であった。この課題について，次のような研究知見が得られ，第一段階の研究目標が一応達成されたと考えてもよい。

リーマン対称空間から，１つの接空間とそれを不変にする等長変換群（イソトロピー群という）の組を考えると，ひとつのコンパクトリー群の表現空間（イソトロピー表現という）が自然に得られる。さらに，イソトロピー表現の表現空間（ベクトル空間）の２次元部分空間全体からなるグラスマン多様体を考えると，イソトロピー表現から誘導されるグラスマン多様体への表現が得られる。この表現に付随する軌道空間が，与えられたリーマン対称空間の全ての形式的グラスマン幾何的曲面論がなす族と１対１に対応している。すなわち，ひとつひとつの軌道が形式的グラスマン幾何的曲面論に対応している。

（２）第二段階の研究成果等

第二段階の研究目標は，（１）で与えられた形式的グラスマン幾何的曲面論が実質的であるための，すなわち，実際にそれに属するグラスマン幾何的曲面が存在するための判定条件を求めることにあった。この課題については，つぎのような方法でアプローチしたが，研究状況は未だ理論構築には至っておらず，今後の課題である。

形式的グラスマン幾何的曲面論が与えられると，（１）で対応するグラスマン多様体の軌道によって定まる２次元部分空間の族が定まる。これを平行移動することによって，リーマン対称空間の各接空間上に２次元部分空間の族が分布する。与えられた２次元曲面がこの形式的グラスマン幾何的曲面論の曲面であることは，２次元曲面の接平面が，全ての点で，上記分布の２次元部分空間の族に属することに他ならない。この関係は，対応する軌道に属する代表元を初期値とする（非線形）１階偏微分方程式系で記述することができ，求める判定条件は，この方程式系の解が存在するための条件を求めることに他ならないことが分かった。一般に，非線形問題を考察するとき，ある種のコホモロジー理論のスキームが有効であるという知見から，この場合にも，その方向のアプローチによって判定条件を記述しようと考えているが，研究途中である。

（３）第三段階の研究成果等

第三段階の研究目標は，様々な空間の曲面論や部分多様体論の研究情報や知見を収集することを通して，リーマン対称空間のグラスマン幾何的曲面論の特徴を明らかにすることであった。この課題については，第二段階の研究が途中段階のため，求めるグラスマン幾何的曲面論の特徴を解明するまでに研究が至っていないが，研究代表者及び研究分担者による次のような研究成果が得られた。

① 複素射影空間のφ－不変な超曲面の分類

② 非正曲率を持つリーマン多様体の二重調和部分多様体の研究による B.Y. Chen 予想の部分的解決

③ 曲面のガウス写像に係る値分布論的性質について，ある種の統一性を発見

④位相的な球面直径定理に関連して，ある種の条件下で微分同相な球面直径定理になることを証明

また，研究期間中，各種研究情報等を収集するため，研究代表者あるいは研究分担者が関与して，以下のような研究集会が催された。

① 第 58 回幾何学シンポジウム，平成 23 年度，開催地（山口，組織委員）
② 山口幾何学研究集会 2013「進展する曲面論」，平成 25 年度，開催地（山口，主催）
③ 第１回金沢・山口合同研究集会　～幾何学の諸分野への応用～，平成 26 年度，開催地（金沢，主催）

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 8 件）
① Kei Kondo, Shin-ichi Ohta, Minoru Tanaka, Topology of complete Finsler manifolds with radial flag curvature bounded below, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 68, 2014, 347－357
DOI: 10.2206/kyushuim.68.347
② Nobumitsu Nakauchi, Hajime Urakawa, Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold with non-positive curvature, Results in Mathematics, 査読有, Vol. 63, 2013, 467-474
DOI: 10.1007/s00025-011-0209-7
③ Fujimori Shoichi, Kawakami Yu, Kokubu Masatoshi, Rossman Wayne, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro, Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and spacelike CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 査読有, Vol. 26, 2012, 1-48
DOI: 10.1007/978-1-4614-4897-6_1
④ Sadahiro Maeda, Hiroo Naitoh, Real hypersurfaces with ϕ-invariant shape operator in a complex projective space, Glasgow Mathematical Journal, 査読有, Vol.53,2011, 347-358
DOI: 10.1017/S0017089510000765
⑤ Nobumitsu Nakauchi, Hajime Urakawa, Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive curvature, Annals of Global Analysis and Geometry, 査読有, Vol.40, 2011, 125-131
DOI: 10.1007/s10455-011-9249-1

〔学会発表〕（計 7 件）
①川上 裕，相山 玲子，芥川 和雄，複素2次元空間内の完備極小ラグランジアン曲面のガウス写像と全曲率の関係について，日本数学会（一般講演），2015年3月21日，明治大学(東京都・千代田区）
② 近藤 慶，リプシッツ写像に対するはめ込み近似定理とその応用，研究集会「測地線及び関連する諸問題」，2015年1月11日，熊本大学(熊本県・熊本市）
③Kei Kondo, Grove-Shiohama type sphere theorem in Finsler geometry, The 29th Annual Conference of Ramanujan Mathematical Society 2014, 2014 年 6 月 24 日, Indian institute of Science Education & Research (IISER),Pune(India)
④ 前田 瞬，浦川 肇，中内 伸光，Chen 予想と３重調和部分多様体，日本数学会（一般講演），2014年2月11日，学習院大学(東京都・豊島区)
⑤Shizuo Kaji, The equivariant cohomology of a manifold with a G-action, Topology of Mapping space and around, 2012年5月14日, Okinawa Senin Kaikan(沖縄県・那覇市)

６．研究組織

(1)研究代表者
内藤　博夫（NAITOH HIROO）
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：10127772

(2)研究分担者
中内　伸光（NAKAUCHI NOBUMITSU）
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：50180237
鍛治　静雄（KAJI SHIZUO）

山口大学・大学院理工学研究科・講師
研究者番号：00509656
川上　裕（KAWAKAMI YU）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：60532356
近藤　慶（KONDO KEI）
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70736123