

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540093

研究課題名(和文)非安定高位コホモロジー作用素によるホップ空間の研究

研究課題名(英文)Study of Hopf spaces by using higher order cohomology operations

研究代表者

逸見 豊 (Hemmi, Yutaka)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：70181477

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：次元が奇数 $2n+1$ である球面のホモトピー群の $p$ 成分は $2n+2i(p-1)-1$ 次元( $n<i<p$ )が非自明になることが知られている。これらの生成元は $n=1$ 、すなわち3次元球面に対しては、戸田のアルファ元の合成で得られることが戸田により示されているが、球面の次元が高くなると、Toda積、あるいは高位のToda積により与えられることは、我々の研究で分かっている。そこで我々は、これらの生成元を値に持つ高位コホモロジー作用素を調べた。3次元球面に対しては、これまでホップ空間の高位ホモトピー結合性を調べる際に重要であった2位作用素になることが分かった。

研究成果の概要(英文)：It is known that the non trivial  $p$ -component of the homotopy group of  $2n+1$  dimensional sphere occurs in dimension  $2n+2i(p-1)-1$  for  $n<i<p$ . The generators for the case of  $n=1$  is given by the composition of the Toda's alpha elements, but for  $n>1$  we showed that they are given by the Toda bracket or higher Toda brackets. We studied higher cohomology operators detecting these generators. For 3-sphere we showed that it is the secondary operation which has been useful in studying higher homotopy associativity of Hopf spaces

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：非安定高位コホモロジー作用素 ホップ空間 高位ホモトピー結合性 Long Toda積 cyclohedron 高位ホモトピー可換性

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者が研究開始前年まで受けていた科学研究費補助金基盤研究(C)による研究課題「ホップ空間と  $p$  コンパクト群の研究」における成果と密接に関連している。この研究課題では、コンパクト Lie 群やそれを一般化した  $p$  コンパクト群の  $\text{mod } p$  分解に関する三村、西田、戸田および Davis の結果をどこまで一般のホップ空間に拡張できるかということが主のテーマであった。そこにおいて、我々は階数が小さい場合に限定し研究を続けてきたが、 $p$  正則性に関する Kumpel の定理や準  $p$  正則性に関する研究代表者の定理をさらに拡張した結果を得ることができた。得られた結果として興味深かったのは、ある条件を満たすホップ空間の分解において、その要素として現れる階数が小さいホップ空間の中に、コンパクト Lie 群や  $p$  コンパクト群の分解の要素としては現れないタイプのものであったことである。そのため、これらの空間を詳しく調べることはホップ空間の研究にとって重要であると考えに至った。

一方、最近になり階数が小さいホップ空間に関し 2 つの興味深い情報を得た。その一つは Harper により発表された論文である。それは、研究代表者が以前に行った予想への肯定的な解決である。研究代表者は 2002 年に、ある条件を持つホップ空間は存在しないという事実を示した。この結果は、Zabrodsky による  $p=3$  の場合の拡張になっており、その証明のために新たな非安定  $p$  位作用素を構成している。その論文の中で研究代表者は、そのようなホップ空間が存在するためには、そこで仮定した条件が必要十分になるのではないかという予想をたてたが、Harper の結果はその予想が正しいことを示すものであった。

他の一つは、Gray からの e-mail で知らされたものである。これは 5 以上の素数に対し、階数が小さなホモトピー結合的ホップ空間を構成する手段が得られたというもので、詳細は分からないが大変興味をそそられるものであった。

このように、研究代表者のこれまでの研究に合わせ上記のような Harper や Gray の研究が知られることとなり、現段階で階数が小さなホップ空間の研究を行うことが重要であると考え、今回の課題による申請を行うことにした。

## 2. 研究の目的

(1)  $\text{mod } p$  有限ホップ空間の非安定高位作用素を用いた研究。特に、階数が小さい  $\text{mod } p$  有限ホップ空間で、ホモトピー結合性あるいは高位ホモトピー結合性を有するものについて調べることが主なる目的である。

(2) さらに、Kumpel による  $p$  正則性や研究代表者による準  $p$  正則性に関する定理の一般化を進める。

(3) さまざまな非安定高位作用素を、ホッ

プ空間の研究の手段という観点から整理するとともに、可能な限り理論的に体系化することも考える。安定 1 位コホモロジー作用素全体は Steenrod 代数とよばれ、 $p=2$  では squaring 作用素で生成され、奇素数に対しては Bockstein 作用素と被約算作用素で生成されることが知られている。さらに、非安定 1 位作用素は Eilenberg-Mac Lane 空間のコホモロジー環により与えられるので安定作用素から自然に得られる。すなわち 1 位作用素は体系的に整理されていることになる。一方、高位作用素は安定作用素でさえ体系的な取り扱いが難しく、非安定となるとさらにそれは困難になる。そこで、非安定高位作用素そのものを整理する。

## 3. 研究の方法

(1) 今回の研究課題であるホモトピー結合性や高位ホモトピー結合性を有する階数が小さいアトミックなホップ空間に関する研究にも有効であると考えた。具体的に用いる作用素は、研究代表者がホップ空間の研究手段として構成した非安定  $p$  位作用素である。この作用素は通常のホップ空間の研究に効果的であったが、これを  $p$  位より低い位数で用いることにより、ホモトピー結合性や高位ホモトピー結合性の研究に用いることができると予想する。たとえば、 $p-1$  位で用いることによりホモトピー結合的ホップ空間に関して適応できることになる。

(2) Kumpel による  $p$  正則性や研究代表者による準  $p$  正則性に関する定理の一般化については 2 位のホモトピー作用素である Toda bracket を高位に、しかも非安定の形で拡張し Long Toda bracket を構成する必要がある。Long Toda bracket はすでに何人かの研究者により構成が与えられているが、それらは、例えば三角圏の上で定義されているなど、安定作用素として与えられている。そのため、われわれの目的に必要な非安定のもの構成とそれを用いた研究を行う必要がある。

(3) 非安定高位作用素そのものを整理し使いやすいものにする研究では、さまざまな非安定高位作用素をホップ空間の研究という観点から整理することになる。特に、これまで効果的に用いられた非安定高位作用素を中心に、より体系的に扱う方法を模索し、今後のホップ空間の研究に役立たせることを考える。

## 4. 研究成果

(1) 次元が奇数  $2n+1$  である球面のホモトピー群の  $p$  成分は  $2n+2i(p-1)-1$  次元 ( $n < i < p$ ) が非自明になることが知られている。これらの生成元は  $n=1$ 、すなわち 3 次元球面に対しては、戸田のアルファ元の合成で得られることが戸田により示されているが、球面の次元が高くなると、Toda 積、あるいは高位の Toda 積により与えられることは、我々の研究で分かっている。そこで我々は、これらの生成元

を値に持つ高位コホモロジー作用素を調べた。3次元球面に対しては、これまでホップ空間の高位ホモトピー結合性を調べる際に重要であった2位作用素になることが分かった。

(2) 有限位相空間の代数的位相幾何学的研究は、有限単体的複体のそれと同値であることが知られている。しかしながら、有限位相空間と連続写像の圏から有限単体複体と単体写像の圏への関手  $K$  は、忠実であるが充満でないことが知られている。そこで、有限位相空間の間の写像の連続性の概念を弱め、関手  $K$  を有限位相空間の圏を拡張した圏からの関手として定義し直し、それにより忠実かつ充満な関手を得ることに成功した。さらに拡張された連続写像に対してもホモトピーの概念を導入することに成功し、それにより関手  $K$  がホモトピー圏における忠実かつ充満な関手を誘導することを示した。

(3) 河本は、Bott-Taubesにより構成された cyclohedron を用いて  $B$  無限-構造と呼ばれる  $A$  無限-空間の新しい高位ホモトピー可換性の構造を導入した。また、 $B$  無限-構造と以前 permuto-associahedron により定義した  $AC$  無限-構造との関係を調べるため、permuto-associahedron の cyclohedron による組合せ論的な分割を与えた。さらに、power 写像を有する高位 homotopy 結合的 Hopf 空間の cohomology 環における Steenrod 作用素の研究を行い、有限性を持つ空間の場合は、power 写像が高位 homotopy 結合性を保てば Steenrod 作用素の作用がある種の強い性質を持つことを示した。特に、power 写像が保つ homotopy 結合性が高ければ、Steenrod 作用素は自明に作用し、それから空間が  $p$  コンパクトトーラスのホモトピー型を持つことを示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

### [雑誌論文](計10件)

Y. Hemmi and T. Kobayashi, Stable extendibility of vector bundles over real projective spaces, *Topology Appl.*, 査読有, 160 巻, 2013, 2170 - 2174

Y. Kawamoto, Higher homotopy commutativity of  $H$ -spaces and the cyclohedra, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 査読有, 49 巻, 2013, 737 - 760

J. Sato, and T. Yamaguchi, Pre-c-symplectic condition for the product of odd-spheres, *J. Homotopy Relat. Struct.* 査読有, 8 巻, 2013, 13 - 34

T. Yamaguchi, Certain homotopy subgroups associated with a map, *Kochi J. Math.*, 査読有, 8 巻, 2013, 35 - 45

K. Hamada, T. Yamaguchi and S. Yokura,

C-symplectic poset structure on a simply connected space, *Topology Appl.*, 査読有, 161 巻, 2013, 107 - 126

S. Goto, Y. Hemmi, K. Komatsu and J. Yagi, The closed chains with spherical configuration spaces, *Hiroshima Math J.*, 査読有, 42 巻, 2012, 253 - 266

T. Yamaguchi, Examples of rational toral rank complex, *Int. J. Math. Sci.*, 査読有, 2012 巻, 2012

Y. Hemmi and Y. Kawamoto, Higher homotopy commutativity and the resultohedra, *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, 63 巻, 2011, 443-471

T. Yamaguchi, A Hasse diagram for rational toral ranks, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 査読有, 18 巻, 2011, 493 - 508

T. Yamaguchi, Examples of a Hasse diagram of free circle actions in rational homotopy, *JP Journal of Geometry and Topology*, 査読有, 11 巻, 2011, 181 - 191

### [学会発表](計10件)

板垣早紀, 逸見豊, 有限位相空間における連続写像の拡張とホモトピーについて, 高知ホモトピー論セミナー, 2013年12月16日, 高知大学(高知県)

河本裕介, Higher homotopy associativity of power mapson finite  $H$ -spaces, 高知ホモトピー論セミナー, 2013年12月16日, 高知大学(高知県)

河本裕介, Higher homotopy associativity of power mapson finite  $H$ -spaces, ホモトピー論シンポジウム, 2013年11月4日, 岡山大学(岡山県)

板垣早紀, 逸見豊, 有限位相空間の圏と有限単体的複体の圏の対応について, ホモトピー論シンポジウム, 2013年11月2日, 岡山大学(岡山県)

河本裕介, ホップ空間の高位ホモトピー可換性と巡回多面体, 日本数学会, 2013年度年会トポロジー分科会, 2013年3月22日, 京都大学(京都府)

山口俊博, 詰め込み複体 vs トーラス階数複体, 鹿児島大学数理情報科学さくらセミナー, 2013年3月18日, 鹿児島大学(鹿児島県)

山口俊博, いくつかの不変量に潜む図形の観察, 高知大学理学部門談話会, 2013年1月23日, 高知大学(高知県)

八木潤, 後藤了, 小松和志, 逸見豊, The topology of a model for ringed hydrocarbon molecules, 日本数学会, 秋季総合分科会, 2012年9月21日, 九州大学(福岡県)

山口俊博, 有理トーラス階数達が張るCW複体, 鹿児島大学数理情報科学談話会, 2012年6月1日, 鹿児島大学(鹿児島県)

河本裕介, 写像の高位ホモトピー可換性  
について, 福岡ホモトピー論セミナー,  
2012年1月7日, 福岡大学(福岡県)

〔図書〕(計 件)  
該当なし

〔産業財産権〕  
該当なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

逸見 豊 (HEMMI, Yutaka)  
高知大学・教育研究部自然科学系・教授  
研究者番号: 70181477

### (2) 研究分担者

河本 裕介 (KAWAMOTO, Yusuke)  
防衛大学校・総合教育学群・准教授  
研究者番号: 10531759

森杉 馨 (MORISUGI, Kaoru)  
和歌山大学・教育学部・特任教授  
研究者番号: 00031807

山口 俊博 (YAMAGUCHI, Toshihiro)  
高知大学・教育研究部自然科学系・教授  
研究者番号: 90346700