

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540094

研究課題名(和文) 安定ホモトピー圏の彩色現象の研究

研究課題名(英文) Study on chromatic phenomena in the stable homotopy category

研究代表者

下村 克己 (Shimomura, Katsumi)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：30206247

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：Hopkinsの提唱した彩色分割予想についてRavenelのスペクトラム $T(m)$ をJohnson-Wilsonのホモロジー群 $E(n)_*$ を考察することからその予想の解決の糸口を見つけようと考察を続けた。成果として、 $T(m)$ の $E(n)$ 局所化のホモトピー群に収束するAdams-Novikovのスペクトル系列に関する結果をはじめとして、 $E(n)$ 局所化した球面のホモトピー群に関連した結果や彩色分割予想が考えられる安定ホモトピー圏に同伴するBousfield束の構造決定などがある。

研究成果の概要(英文)：We tried to find a clue for the Hopkins' chromatic splitting conjecture by considering the Johnson-Wilson homology $E(n)_*$ of Ravenel spectrum $T(m)$.

Our achievement is a result on the Adams-Novikov spectral sequence converging to the homotopy groups of the $E(n)$ -localized $T(m)$ as well as a result on the homotopy groups of the $E(n)$ -localized sphere, and the determination of the Bousfield lattice associated with the stable homotopy category where the chromatic splitting conjecture is.

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学 安定ホモトピー論 彩色理論

1. 研究開始当初の背景

安定ホモトピー論は米国の M. Mahowald, D. Ravenel, H. Miller, M. Hopkins をはじめとした著名な研究者たちにより、米国、英国を中心に研究されている。その研究手法の一つが彩色理論に基づくものである。研究代表者の E(2)-局所化された球面スペクトラムのホモトピー群の研究結果に基づいて M. Hopkins により立てられた「ゼータ予想」や「彩色分割予想」は彩色理論での重要な予想のひとつである。当然ながら、これらの予想は各非負整数 n に対して立てられており $n = 0, 1$ の場合及び素数 $p \neq 5$ の時の $n=2$ の場合は示されている。

2. 研究の目的

本研究ではこれらの予想を、米英の研究者の Morava の $K(n)$ -理論に基づく代数幾何学的考察とは異なり、Johnson-Wilson のスペクトラム $E(n)$ に基づくアプローチから考察し、小さな n に対する場合、特に、素数 3 で $n=2$ の場合と $n=3$ の場合を考察し、一般の場合の解決への足がかりを探ることを目的とする。

3. 研究の方法

この研究では主にホモトピー群 $(L_{E(n)}S)$ の入射的部分加群 $Q/Z_{(p)}$ が各素数でどのように現れてくるかについて考察する。Ravenel のスペクトラム $T(m)$ の $L_{E(n)}$ による局所化のホモトピー群に現れる各素数での差異はホモトピー群 $(L_{E(n)}S)$ に現れるものほど多くはない。したがって、群 $(L_{E(n)}S)$ に現れる差異は $T(m)$ と S をつなぐ無限降下スペクトル系列の途中に現れてくる。この差異について、 $n = 2, p = 3$ の場合、 $n = 2, p = 2$ の場合、 $n = 3$ の場合と段階的に考察していく予定であった。これらの場合の主な研究方法は Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 -項を用いて、Ext 群の計算問題に帰着させるものである。

4. 研究成果

結論としては彩色分割予想に直接関連する結果は論文にまとめるまでには至らなかったが、間接的に関連する結果は以下のように論文にまとめ発表された。これらの結果をもとにさらなる研究を続けることにより直接、彩色分割予想に近づけると期待できる。成果として得られた論文と彩色分割予想との関連を述べておく。

研究の方法で述べた $T(m)$ のホモトピー群に関する結果として北濱氏との $\text{Ext}^0(M_{n-1}^1)$ on $(m+1)$ に関する論文にまとめた。さらにホモトピー群 $(L_{E(n)}S)$ を考察するためにこの群に収束する Adams-Novikov のスペクトル系列の E_2 -項に収束する彩色スペクトル系列を考える。彩色スペクトル系列の E_1 -項は Bockstein のスペクトル系列により計算される。その E_1 -項を決定するためにの論文で $H^1S(n, n-1)$ を渡嘉敷氏と決定した。Bockstein

スペクトル系列の E_1 -項に関してはもう一つ加藤氏とともに得られたの論文がある。これらの結果は直接には彩色分割予想には関連していないが、それ自体でホモトピー論的には興味深い結果となっている。

さらに、吉ざわ氏とのと、加藤氏とのの論文では球面の安定ホモトピー群 (S) の生成元についての新たな見識をもたらしている。の論文では Adams-Novikov スペクトル系列の 2 番目のライン上に一般的なホモトピー元があることを示している。この延長線上に彩色分割予想の 2 番目の元に関する情報が存在していると思われる。これに関しては学会発表のにあるように岡崎氏との研究結果があるが、計算の非常に煩雑さからいまだ論文にまとめられずにいる。

の論文では、加藤氏、立原氏と共著で彩色分割予想がたてられた安定ホモトピー圏を Bousfield 類に類別して得られる Bousfield 束を束論の見地から考察したものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Ryo Kato, Katsumi Shimomura and Yutaro Tatehara, Generalized Bousfield lattices and a generalized retract conjecture, Publications of Reserch Institute for Mathematical Sciences., 「印刷中」 査読有

Katsumi Shimomura and Kie Yoshisawa, On the product $\tau_1 \tau_1^t$ in the stable homotopy groups of spheres, Kochi Journal of Mathematics 9 (2014), 169-172, 査読有

Katsumi Shimomura, A beta family in the homotopy of spheres, Proceedings of the American Mathematical Society 142 (2014), 2921—28, 査読有

Ryo Kato and Katsumi Shimomura, The first line of the Bockstein spectral sequence on a monochromatic spectrum at an odd prime, Nagoya Mathematical Journal 207 (2012), 139-157, 査読有

Ryo Kato and Katsumi Shimomura, Products of greek letter elements dug up from the third Morava stabilizer algebra, Algebraic and Geometric Topology 12 (2012), 951-961, 査読有
Katsumi Shimomura and Shogo Tokashiki, The cohomology of $S(n, n-1)$ relevant to the Morava stabilizer algebra at an odd prime, Kochi Journal of Mathematics 7 (2012), 109-118, 査読有

Rie Kitahama and Katsumi Shimomura, On the chromatic $\text{Ext}^0(M_{n-1}^1)$ on $(m+1)$

for an odd prime, Hiroshima Math. J. 41 (2011), 211-222, 査読有

〔学会発表〕(計 23 件)

宮沢健太郎、下村克己、球面の安定ホモトピー群の元と元の非自明な積について、平成 25 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 26 年 1 月 26 日、島根大学

吉ざわ希恵、下村克己、球面の安定ホモトピー群の元 $\pi_{1}^{st} \pi_{t}^{st}$ の非自明性について、平成 25 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 26 年 1 月 26 日、島根大学

加藤諒、川元祐奈、下村克己、Relation between $E(n)$ - and $K(n)$ -Picard groups, 平成 26 年 1 月 12 日、福岡大学

下村克己、Picard groups and exotic module spectra, 高知ホモトピー論談話会 2013、平成 25 年 12 月 27 日、高知大学

立原有太郎、加藤諒、下村克己、Bousfield lattices of stable homotopy categories, 2013 年度ホモトピー論シンポジウム、平成 25 年 11 月 2 日、岡山大学

下村克己、Constructions of beta elements of stable homotopy of spheres, 2013 年度ホモトピー論シンポジウム、平成 25 年 11 月 2 日、岡山大学

加藤諒、川元祐奈、下村克己、特別な $E(n)$ 可逆スペクトラムの非存在性、2013 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 25 年 9 月 26 日、愛媛大学

柏木智希、加藤諒、下村克己、The 2-primary chromatic $H^1M_{n-1}^1$, 2013 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 25 年 9 月 26 日、愛媛大学

加藤諒、下村克己、立原有太郎、Generalized Bousfield lattices and generalized retract conjecture, 2013 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 25 年 9 月 26 日、愛媛大学

加藤諒、下村克己、元の積について、2013 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 25 年 9 月 26 日、愛媛大学

吉ざわ希恵、下村克己、球面の安定ホモトピー元 $\pi_{1}^{st} \pi_{2}^{st} \pi_{p+1}^{st}$ について、平成 24 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 25 年 1 月 27 日、高知大学

川元祐奈、下村克己、 $p=5, n=3$ のピカール群について、平成 24 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 25 年 1 月 27 日、高知大学

岡崎未希子、下村克己、Chromatic Splitting Conjecture の二つ目の生成元について、平成 24 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 25 年 1 月 27 日、高

知大学

市木一平、下村克己、立原有太郎、素数 3 における $E(2)$ 局所的可逆スペクトラムのホモトピー群について、平成 24 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 25 年 1 月 27 日、高知大学

下村克己、素数 3 におけるもう 1 つの $E(2)$ 可逆スペクトラムについて、高知ホモトピー論談話会 2012、平成 24 年 12 月 27 日、高知大学

市木一平、下村克己、立原有太郎、素数 3 でのある 2 型環スペクトラムのピカール群を次数とするホモトピー群について、2012 年度ホモトピー論シンポジウム、平成 24 年 11 月 3 日、山口大学

加藤諒、下村克己、立原有太郎、Bousfield quantale and its sublattice of idempotents, 2012 年度ホモトピー論シンポジウム、平成 24 年 11 月 3 日、山口大学

市木一平、下村克己、立原有太郎、 L_2 のピカール群を添数とするある 2 型スペクトラムのホモトピー群、2012 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 24 年 9 月 18 日、九州大学

加藤諒、下村克己、立原有太郎、On the generalized retract conjecture, 2012 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 24 年 9 月 18 日、九州大学

加藤諒、下村克己、立原有太郎、Bousfield lattice におけるレトラクト予想について、平成 23 年度日本数学会中国・四国支部例会、平成 24 年 1 月 22 日、岡山大学

21 下村克己、Invertible spectra in the $E(n)$ -local category, 高知ホモトピー論談話会 2011、平成 23 年 12 月 27 日、高知大学

22 加藤諒、下村克己、立原有太郎、Generalization of strange Bousfield classes in the stable homotopy category of spectra, 2011 年度日本数学会秋季総合分科会、平成 23 年 9 月 30 日、信州大学

23 加藤諒、下村克己、On the element p/p^p in stable homotopy and its applications, 日本数学会秋季総合分科会、平成 23 年 9 月 30 日、信州大学

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：

国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kochi-u.ac.jp/katsumi/publist.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

下村 克己 (SHIMOMURA, Katsumi)

高知大学・教育研究部自然科学系・教授

研究者番号：30206247

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：