様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月　 2 日現在

機関番号：32682
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：23540095
研究課題名（和文）調和写像によるベクトル束と部分多様体の双対性の幾何学

研究課題名（英文）Geometry of vector bundles and submanifolds realized by harmonic maps

研究代表者
長友　康行（NAGATOMO, YASUYUKI）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：10266075

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円、（間接経費）　　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：球面から球面への極小部分多様体のモジュライ空間を記述するDo Carmo-Wallach理論の代表者による一般化を、写像のゲージ同値関係という概念を定義することにより、さらに精密化することに成功した。これにより、先行結果の別証明が与えられるだけではなく、複素射影直線から複素2次超曲面への正則等長写像の2種類のモジュライ空間を得ることができた。さらに射影的平坦写像を定義し、その性質を考察した。
また、ベクトル束の切断から誘導される対称空間上の等径超曲面の部分多様体としての不変量をベクトル束の接続に関する不変量と結びつけることにより、等径超曲面の主曲率を求めることに成功した。

研究成果の概要（英文）：Though a generalization of Do Carmo-Wallach theory on moduli spaces of minimal immersions between spheres was achieved by me, I succeeded to refine it. To do so, I define a new equivalence relation of maps called gauge equivalence of maps. This gives a unified proof of results which were obtained in another ways. In addition, I described a moduli spaces of holomorphic isometric embeddings of complex projective lines into complex quadrics. Moreover, I defined a projectively flat immersions into complex Grassmannian and obtained some properties of projectively flat immersions.
On the other hand, I got principal curvatures of isoparametric hypersurfaces of compact symmetric spaces. Such hypersurfaces was defined by isoparametric functions induced from sections of vector bundles. Invariants of submanifolds are related to invariants of connections on vector bundles.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ベクトル束　調和写像　正則写像　ゲージ理論　部分多様体　モジュライ空間

１．研究開始当初の背景

（１）リーマン多様体から球面への極小はめ込みや調和写像を特徴付ける「高橋の定理」は 1960 年代半ばから知られていたが、研究開始当初にすでに代表者は、この定理の一般化に成功していた。すなわち、リーマン多様体からグラスマン多様体、もっと広くコンパクト型対称空間への調和写像の特徴づけを、ベクトル束とその切断、および切断に作用するラプラス作用素を利用することにより行った。この結果、「高橋の定理」を利用することによって得られた、球面から球面への極小はめ込みを分類する Do Carmo-Wallach 理論の一般化にも成功していた。だがこの時点では、Do Carmo-Wallach 理論の一般化を使って証明できるのは、写像の剛性定理のみであった。

（２）ベクトル束とその切断を利用して、等径部分多様体の族を組織的に構成した。（１）では切断のなす空間を使って、リーマン多様体からグラスマン多様体への写像を構成したのに対し、この議論では、切断をひとつ決めると、リーマン多様体内の部分多様体が決定される。そして、この部分多様体はグラスマン多様体の部分多様体と関係しているのである。つまり、グラスマン多様体上のベクトル束の切断の引き戻しが問題の切断であることから、その関係が生じるのである。ただし、一般には切断の零点集合が問題となるのに対し、ベクトル束の計量を利用して、切断から関数を構成できるところに新味があり、事実、関数の等位面として等径部分多様体が得られたのであった。さらにもっとも簡単に思える場合にベクトル束の接続の不変量と部分多様体の不変量との結びつきを示し、等径部分多様体の主曲率を求めることに成功していた。

２．研究の目的

上記１．の（１）と（２）を見れば、それぞれの理論を進化、深化させることはもちろん、その関係を見出すことにも期待ができそうである。そこで、ベクトル束と調和写像、もしくはベクトル束と部分多様体の関係を微分幾何学的立場から考察したいと考えた。

また、１.（１）における Do Carmo-Wallach 理論の一般化においては、ベクトル束の反自己双対接続のモジュライ空間の理論である ADHM 構成法とよく似た定式化が現れる。そこで、これを精査し、調和写像のモジュライ空間の大域的構成をめざしたいと考えた。実際に両理論において、非線型偏微分方程式の解が、ある線形偏微分方程式と結びつくことがこのような大域的なモジュライ空間を構成できる鍵となっているので、不可能ではないと思われた。

最後にベクトル束の切断から誘導される関数の等位面として得られる部分多様体の不変量とベクトル束の関係も調べてみたいと考えた。

３．研究の方法

（１）すでに言及した「高橋の定理」においては、ベクトル束は表立って現れない。そこで、高橋の定理を利用した数多くの論文においてもベクトル束は接束と法束以外は現れなかった。Do Carmo-Wallach 理論もその典型であるといえる。また、Toth の論文においても複素射影空間から複素射影空間への特別なクラスの調和写像が問題となっているが、Hopf 写像を経由して高橋の定理と関連させることにより、調和写像とベクトル束との直接的な関係には Toth は言及していない。つまり、研究代表者の結果すなわち、上記１.（１）、（２）にはほとんど前例がない状況であった。

そこで、まず一般論を構築する前に、個々の具体例の研究を欠かすことができないと思われた。ただし、従来の研究においてはこの具体例の研究自体が、一つの研究課題に匹敵するものであったことを付記しておきたい。

もちろん以前に得られた結果をさらによいものにしていくことも大事である。

このような状況であったので、多くの研究者との交流が不可欠であると考えた。とくに問題を以前から共同で追及してきた、連携研究者の高橋正郎氏との議論が非常に重要であった。

⑵ 研究成果を発表し、さまざまな分野の研究者との議論の機会を増やすことも重要である。特に海外の研究者に触発されたアイディアが本研究には多いことから、引き続き海外の研究者と直接的、間接的に議論していくことも重要であった。

４．研究成果

（１）コンパクト対称空間上の等質ベクトル束とその切断から組織的に誘導される等径超曲面のうち、ほとんどの超曲面に関しては主曲率を求めることに成功していた。これらはラドン変換により、球面内の主曲率が２種類の等径超曲面に対応する。しかし、ラドン変換により、球面内の主曲率が４種類になる超曲面に対応する対称空間内の超曲面に関しては、上で成功した方法は適用できなかった。そこで、新たな手法を開発することにより、その主曲率を計算することに成功した。この結果に関しては現在論文を作成中である。

（２）Do Carmo-Wallach の理論の研究代表者による一般化をさらに精密にし、モジュライ空間の構成ができるようにした。そのために、新たな写像の同値関係を定義し、ゲージ同値

性と名付けた。以前から考察の対象になっていた同値関係を像同値性と呼ぶことにすると、Do Carmo-Wallach や Toth の扱った場合には、この二つの同値関係が一致していたことがわかった。これは我々の理論内では彼らの場合には階数が１のベクトル束を問題にしているからだと言うことができる。しかし、一般にはこの二つの同値関係は別物であることがわかった。
　さらに新たな同値関係の導入により、ある場合には、モジュライ空間の自然な計量によるコンパクト化の幾何学的意味をはっきりさせることに成功した。
　この結果に関しては、現在論文を執筆中である。

（３）（２）の成果を利用して、複素射影直線から複素２次超曲面への正則等長写像のゲージ同値関係によるモジュライ空間と像同値関係によるモジュライ空間を求めることに成功した。（２）により、問題をコンパクト群の表現論に帰着させ、表現の詳細を論じることによって証明することができた。また前者のモジュライ空間には円周作用が存在するが、この円周作用による商集合が後者のモジュライ空間になっている。この円周作用は標準接続のホロノミー群のベクトル束の構造群内の中心化群による作用から導入される作用である。このように写像のモジュライ空間の理論にベクトル束や接続、そのホロノミー群などが関連していることを示せたことは重要な成果であると考えている。
　また、ゲージ同値関係によるモジュライ空間はケーラー構造を持つことを示すことができるが、上記した円周作用はこのケーラー構造を保つために運動量写像を許容する。したがって、像同値関係によるモジュライ空間は複素部分多様体による葉層構造を持つことがわかった。
　これらの結果に関しては、現在論文を執筆中である。

（４）Einstein-Hermite はめ込みと名付けた正則写像の特別なクラスに対し、その写像がゲージ同値性を除いて、剛性を持つための十分条件を与えた。これは、先行研究の剛性定理を、定義域がコンパクトエルミート対称空間であるときに、また終集合を複素射影空間から複素グラスマン多様体に拡張した結果となっている。この結果に関しては、（２）の結果の応用として、論文を作成中である。

（５）Einstein-Hermite はめ込みのうち、さらに特別な性質を満たすものを射影的平坦はめ込みと名付け、複素グラスマン多様体への射影的平坦はめ込みの性質を調べた。その結果、射影的平坦はめ込みの第２基本形式と正則断面曲率との間に成り立つ関係を見出した。これは、A.Ros の結果の一般化となっている。また、（４）の結果を用いれば、射影的平坦写像の剛性に関しても議論ができそうであるが、この話題に関しては引き続き、研究を続けたいと思っている。
　最後の剛性の部分は除くが、この話題に関しては、Ros の結果の一般化として、現在論文が完成し、投稿準備中である。

（６）コンパクト四元数ケーラー多様体上の特別な接続を許容するベクトル束において定義されるツイスター方程式をみたす切断はツイスター切断といわれる。ツイスター切断を用いてグラスマン多様体への写像を構成する。このとき、この写像が（半）バランス条件を満たすならば、調和写像であることがわかった。定義域がコンパクト四元数対称空間であり、ベクトル束が既約等質束であり、階数が底空間の（複素）次元以下である場合にツイスター切断を許容するベクトル束を用いて構成される調和写像の分類を与えた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１　件）
① 長友康行、　四元数ケーラー多様体のツイスター埋め込み、査読なし、
数理解析研究所講究録，1817，2012，64-70

〔学会発表〕（計　５　件）
① 長友康行、グラスマン多様体への調和写像、2013 年 7 月
② 長友康行、Harmonic mappings into Grassmannian manifolds, 2013 年 4 月
③ 長友康行、Harmonic maps into Grassmannian manifolds, 2012 年 9 月
④ 長友康行、四元数多様体のツイスター埋め込み、2012 年 6 月
⑤ 長友康行、Vector bundles, harmonic maps and isoparametric functions, 2011 年 9 月

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：

権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
長友　康行（NAGATOMO, Yasuyuki）
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：10266075

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
高橋　正郎（TAKAHASHI, masaro）
久留米工業高等専門学校・一般科目理科系・准教授
研究者番号：70311107