

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540097

研究課題名(和文)部分多様体と等質曲線

研究課題名(英文)Submanifolds and homogeneous curves

研究代表者

前田 定廣 (Maeda, Sadahiro)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40181581

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：殆どが非平坦複素空間形(即ち、複素射影空間または複素双曲型空間)内の等質実超曲面に関する結果である。この複素空間形を外側の空間に取る限り、全ての測地線が外側の円に写る実超曲面は存在しない。そこである3つの等質実超曲面を考察し特徴付けを与えた。これが本研究計画の主要な結果の一つである。もう一つは、複素空間形内の極小線織実超曲面の分類問題の解決。結果は、外側の空間が複素射影空間と複素双曲型空間で異なることである。複素射影空間はただ一つの極小線織実超曲面しか有しないが、複素双曲型空間は極小線織実超曲面を3つ有する。正曲率の場合と負曲率の場合で結果が異なるのは興味深い。

研究成果の概要(英文)：There are almost results related to real hypersurfaces in a nonflat complex space form which is either a complex projective space or a complex hyperbolic space. It is known that there does not exist a real hypersurface all of whose geodesics are mapped to circles in a nonflat complex space form. From this viewpoint we consider three real hypersurfaces in this ambient space. This result is a main theorem in this study. Another main theorem is a classification theorem of minimal ruled real hypersurfaces in a nonflat complex space form. Complex projective space admits just one minimal ruled real hypersurface. However Complex hyperbolic space admits three minimal ruled real hypersurfaces. This result depends on the sign of sectional curvatures of these ambient spaces. From this viewpoint this result is interesting.

研究分野：数学(幾何学)

キーワード：微分幾何学 実超曲面論 等質実超曲面 線織実超曲面 測地線 円 接触形式 外微分

1. 研究開始当初の背景:

- (1) 幾何学特に微分幾何学と言えば、測地線の研究に偏重している傾向があった。もっと広いクラスの曲線を考えたい。候補として考察しているリーマン空間 M の等長変換群 $I(M)$ の 1 径数部分群の軌道である等質曲線を考える。
- (2) 一方、階数 1 の部分多様体論は進歩していて豊富な成果が蓄積されている。そこで微分幾何学の曲線論にこの部分多様体論を取り入れて曲線論に新たな発展をもたらしたかった。

2. 研究の目的:

- (1) 微分幾何学では測地線のみを取り扱い専ら考察の対象にしていた。そこで階数 1 の対称空間に限定して測地線のみならず等質曲線も考察する。
- (2) そうやって微分幾何学における曲線論を豊かにする。測地線は任意のリーマン空間において良い曲線であるが、一般的に測地線を含む曲線族として何を考察するかは、その研究者の幾何学的センスに依る。そこで任意の対称空間では全ての測地線は等質曲線であることを思い出す。そこで階数 1 の対称空間だけを考察してこの空間上で等質曲線論を構築するのである。

3. 研究の方法:

- (1) 階数 1 の対称空間は良い幾何的性質を持ったリーマン部分多様体を豊富に含んでいる。例えば、階数 1 の対称空間を階数 1 の対称空間に平行部分多様体として等長にはめ込む例は科学的に実に興味深い。そのような部分多様体上の測地線は外側の階数 1 の対称空間内では測地線とは限らないが、等質曲線になっている事例が多い。
- (2) 階数 1 の部分多様体論 M を利用して M 上の等質曲線論を進展させ逆に発展させた等質曲線論を M 内の部分多様体論にフィードバックさせる。非平坦複素空間形内の極小線織実長曲面の分類問題の解決はその好例である。

4. 研究成果

- (1) 非平坦複素空間形内の 3 つのある等質実超曲面で、ある方向の測地線が円に写りしかもその円が同じ曲率であるものを考察しそれら 3 つの等質実超曲面に特徴付けを与えた。一つは非平坦複素空間形内

の totally η -umbilic 実超曲面、更に線織実超曲面およびある (A2) 型等質実超曲面が考察物である。

- (2) 接触幾何学の観点から非平坦複素空間形内の(A)型および(B)型等質実超曲面を考察した。ここでは、接触形式の外微分を考える。
- (3) 非平坦複素空間内の実超曲面で型作用素が強い意味で ϕ -不変なものを考察した。ここで複素双曲型空間ではそのような実超曲面は存在しないことに注意されたい。
- (4) 接触幾何学と非平坦複素空間形内の実超曲面論の関係を調べた。特に (A) 型等質実超曲面および (B) 型等質実超曲面について調べた。
- (5) 球面内の余次元が高い部分多様体で様々な性質をもったものを構成した。これは複素射影空間内の実超曲面論の応用。この例は、測地線論および接触幾何学両面からみても面白い例である。
- (6) 複素双曲型空間内のホロ球面に接触形式の外微分方程式を用いて特徴付けを与えた。勿論、ホロ球面は測地球面の極限であるが、測地球面はホロ球面と違って接触形式の外微分で特徴付けることはできない。この点興味深い。
- (7) ユークリッド球面上の閉螺旋について考察した。これは複素射影空間内の円についての応用。6次元以上の球面には任意の長さを持つ閉螺旋が存在することが分かる。
- (8) 複素双曲型空間内の(B)型等質実超曲面で主曲率 2 種のもを特徴付けた。道具として接触形式の外微分、測地線の外的状況などを使っている。
- (9) 複素射影空間内の (A2) 型極小等質実超曲面に特徴付けを与えた。
- (10) 非平坦複素空間形内の測地球面の幾何的性質を詳しく調べた。
- (11) 非平坦複素空間形内の実超曲面でリッチテンソルが η -平行なものを精査した。その結果、 $n = 2$ のとき非等質実超曲面が存在することが分かった。昔よりいられていた結果に $n = 2$ のとき穴があった訳である。
- (12) 非平坦複素空間形内の極小線織実超曲面を分類した。この分類結果は、非平坦複素空間形内の全実円の分類と対応している。
- (13) 複素双曲型空間内の半径が十分小さい測地球面を考察した。これらの測地球面は断面曲率が零以上である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件) 全て査読有り。

- (1) Three real hypersurfaces some of whose geodesics are mapped to circles with the same curvature, (with K. Okumura and S. Maeda, *Geometriae Dedicata* 156 (2012), 71-80.
- (2) Real hypersurfaces which are contact in a nonflat complex space form, (with T. Adachi, S. Maeda and M. Kameda), *Hokkaido Math. J.* 40 (2011), 205-217.
- (3) Real hypersurfaces with ϕ -invariant shape operator in a complex projective space, (with S. Maeda and H. Naitoh), *Glasgow Math. J.* 53 (2011), 347-358.
- (4) Real hypersurfaces in a nonflat complex space form and their almost contact metric structures, (with Y.H. Kim and S. Maeda), *Colloquium Math.* 124 (2011), 117-131.
- (5) A homogeneous submanifold with nonzero parallel mean curvature vector in Euclidean sphere, (with S. Maeda and S. Udagawa), *J. Geom.* 102 (2011), 123-131.
- (6) Geometry of the horosphere in a complex hyperbolic space, S. Maeda, *Diff. Geom. And its Appl.* 29 (2011), S246-S250.
- (7) A certain two-parameters family of helices of order 6 in Euclidean sphere, (with S. Maeda and B.H. Kim), *Diff. Geometry and its Appl.* 35 (2014), 117-124.
- (8) The real hypersurface of type (B) with two distinct principal curvatures in a complex hyperbolic space, (with K. Yamashita and S. Maeda), *Kodai Math. J.* 37 (2014), 24-33.
- (9) A characterization of minimal real hypersurfaces of type (S^2) in a complex projective space, (with Y. Taniguchi and S. Maeda), *Sci. Japonicae* 74 (2011), 139-144.
- (10) Characterizations of geodesic hyperspheres in a nonflat complex space form, (with T. Adachi, S. Maeda and Y.H. Kim), *Glasgow Math. J.* 55 (2013), 217-227.
- (11) Hopf hypersurfaces with η -parallel Ricci tensors in a nonflat complex space form, S. Maeda, *Sci. Math. Japonicae* 76 (2013), 449-456.
- (12) Congruence classes of minimal ruled real hypersurfaces in a nonflat complex space form, (with T. Adachi, T. Bao and S. Maeda), *Hokkaido Math. J.* 43 (2014), 1-14.
- (13) Nonnegatively curved geodesic spheres in a complex hyperbolic space, S.

Maeda, *Math. Reports Acad. Sci. Royal Soc. Canada* 34 (2013), 38-44.

[学会発表](計 23 件)

(シンポジウムおよび学会発表)

- (1) Length spectrum of geodesic spheres in a nonflat complex space form, S. Maeda, 熊本大学教育学部における「幾何学研究集会」で講演, 2011年1月.
- (2) Length spectrum of circles in a complex projective space, S. Maeda, 佐賀大学における「幾何学研究集会」で講演, 2011年1月.
- (3) 空間形内の等質部分多様体と等質曲線を巡って, S. Maeda, 佐賀大学における「幾何学研究集会」で講演, 2012年8月.
- (4) A characterization of the homogeneous ruled real hypersurface in a complex hyperbolic space, S. Maeda, 広島大学における「幾何学研究集会」で講演, 2012年10月.
- (5) Characterizations of three homogeneous real hypersurfaces in a complex hyperbolic space, S. Maeda, NIMS 研究所(韓国・大田)における「国際研究集会」で講演, 2013年2月.
- (6) A characterization of the horosphere in a complex hyperbolic space, S. Maeda, ブルノ(チェコ共和国)における「DGA2013 国際研究集会」で講演, 2013年8月.
- (7) Homogeneous submanifolds and homogeneous curves in a nonflat complex space form, S. Maeda, 島根大学における「国際研究集会」で基調講演, 2013年9月.
- (8) A characterization of the horosphere in a complex hyperbolic space, S. Maeda, マンガリア(ルーマニア)における「国際研究集会」で講演, 2014年8月.
- (9) 非平坦複素空間形内の実超曲面と概接触計量構造, (with Y.H. Kim and S. Maeda), 早稲田大学における日本数学会で一般講演, 2011年3月.
- (10) 複素双曲型空間内のホ口球面の特徴付け, S. Maeda, 信州大学における日本数学会で一般講演, 2011年9月.
- (11) 非平坦複素空間形内の totally eta-umbilic 実超曲面とその概接触計量構造, S. Maeda, 信州大学における日本数学会で一般講演, 2011年9月.
- (12) 非平坦複素空間形内の測地球面の特徴付け, (with S. Maeda, T. Adachi and Y.H. Kim), 東京理科大学における日本数学会で一般講演, 2012年3月.
- (13) 佐々木空間形の length spectrum について, (with S. Maeda and T. Adachi), 東京理科大学における日本数学会で一般講演, 2012年3月.
- (14) 球面内の等径超曲面の特徴付け, S. Maeda, 九州大学における日本数学会で

- 一般講演，2012年9月。
- (15) 非平坦複素空間形内の極小線織実超曲面の合同類，(with S. Maeda, T. Adachi and T. Bao)，東京理科大学における日本数学会で一般講演，2012年3月。
- (16) 複素双曲型空間内の定主曲率2種を持つ(B)型等質実超曲面の特徴付け，(with S. Maeda and K. Yamashita)，京都大学における日本数学会で一般講演，2013年3月。
- (17) 複素射影空間内の(A2)型極小実超曲面の特徴付け，(with S. Maeda and Y. Taniguchi)，京都大学における日本数学会で一般講演，2013年3月。
- (18) 非平坦複素空間形内の線織実超曲面の断面曲率，(with S. Maeda and H. Tanabe)，愛媛大学における日本数学会で一般講演，2013年9月。
- (19) 非平坦複素空間形内の正規実超曲面，(with S. Maeda, H. Tanabe and B.H. Kim)，愛媛大学における日本数学会で一般講演，2013年9月。
- (20) 非平坦複素空間形内のリッチテンソルがeta-平行なホップ超曲面の分類定理，S. Maeda，学習院大学における日本数学会で一般講演，2014年3月。
- (21) 複素双曲型空間内の3つの等質実超曲面の分類定理，S. Maeda，学習院大学における日本数学会で一般講演，2014年3月。
- (22) 非平坦複素空間形内の自然還元等質実超曲面，(with S. Maeda and H. Tamaru)，広島大学における日本数学会で一般講演，2014年9月。
- (23) 非平坦複素空間形内の線織実超曲面に関する注意，(with T. Adachi and S. Maeda)，明治大学における日本数学会で一般講演，2015年3月。

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
 ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前田 定廣 (MAEDA, Sadahiro)
 佐賀大学・工学系研究科・教授
 研究者番号：40181581

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：